

El model de Barro

El model analitzat a continuació es deu a Robert Barro¹, que estén el model de creixement de Solow (1956)² i Swan (1956)³ amb la incorporació d'un govern (o sector públic).

El govern aporta un bé públic, que es pot interpretar com una externalitat positiva en la producció. Per exemple, es pot interpretar que el govern facilita infraestructures (de transport, d'energia, de comunicacions, digitals...). La quantitat de bé despesa en el bé públic es designa per E . Es podria considerar que E representa el volum de recursos que el govern destina a desenvolupar una política industrial adreçada a incrementar la productivitat (o a fer permanent el creixement econòmic).

- **Funció de producció agregada** $Y = A \cdot K^\alpha \cdot E^{1-\alpha}$, on $0 < \alpha < 1$ i $A > 0$

La població creix a una taxa constant $n > 0$. Dividint els dos costats per la població L s'obté la funció de producció per càpita (on $k = K/L$ i $e = E/L$).

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{A \cdot K^\alpha \cdot E^{1-\alpha}}{L} = A \cdot \frac{K^\alpha}{L^\alpha} \cdot \frac{E^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{E}{L}\right)^{1-\alpha} = A \cdot k^\alpha \cdot e^{1-\alpha}$$

- **Funció de producció per càpita** $y = A \cdot k^\alpha \cdot e^{1-\alpha}$

El bé públic (la política industrial) es finança amb impostos. La taxa impositiva és $0 < \tau < 1$. La renda agregada disponible Y_d és $Y_d = (1 - \tau) \cdot Y$. S'assumeix que el sector privat estalvia una proporció fixa $0 < s < 1$ de la renda disponible.

- **Funció d'estalvis totals** $S = s \cdot Y_d = s \cdot (1 - \tau) \cdot Y$, on s és la taxa d'estalvi

- **Equilibri macroeconòmic** $S = I$ on I és el volum agregat d'inversió privada

El capital s'acumula com en el model de Solow i Swan, on $0 < \delta < 1$ és la taxa de depreciació del capital:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) \cdot K_t.$$

¹ Barro, Robert J. (1990): "Government spending in a simple model of endogenous growth", Journal of Political Economy 98, 103-125.

² Solow, Robert M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth", Quarterly Journal of Economics 70, 65-94.

³ Swan, Trevor W. (1956): "Economic growth and capital accumulation", Economic Record 32, 334-361.

Dividint tots dos costats per L_{t+1} i sabent que $L_{t+1} = (1+n) \cdot L_t$,

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{I_t}{(1+n) \cdot L_t} + \frac{(1-\delta) \cdot K_t}{(1+n) \cdot L_t}.$$

Emprant la condició d'equilibri macroeconòmic,

$$k_{t+1} = \frac{s \cdot (1-\tau) \cdot Y_t}{(1+n) \cdot L_t} + \frac{(1-\delta) \cdot K_t}{(1+n) \cdot L_t} = \frac{s \cdot (1-\tau)}{1+n} \cdot y_t + \frac{1-\delta}{1+n} \cdot k_t.$$

Si es resta k_t dels dos costats de la igualtat,

$$k_{t+1} - k_t = \frac{s \cdot (1-\tau)}{1+n} \cdot y_t + \left(\frac{1-\delta}{1+n} - 1 \right) \cdot k_t = \frac{s \cdot (1-\tau)}{1+n} \cdot y_t - \left(\frac{\delta+n}{1+n} \right) \cdot k_t$$

o, en notació més compacta:

$$\Delta k = \frac{s(1-\tau)}{1+n} y - \left(\frac{\delta+n}{1+n} \right) k.$$

- **Dinàmica del capital per càpita** $g_k = \frac{\Delta k}{k} = \frac{s(1-\tau)}{1+n} \frac{y}{k} - \frac{\delta+n}{1+n}$

Inserint $y = A \cdot k^\alpha \cdot e^{1-\alpha}$ resulta

$$g_k = \frac{s(1-\tau)}{1+n} \cdot A \cdot \left(\frac{e}{k} \right)^{1-\alpha} - \frac{\delta+n}{1+n}.$$

El pressupost públic s'assumeix sempre equilibrat: impostos i despesa en el bé públic coincideixen.

- **Condició d'equilibri pressupostari** $E = \tau \cdot Y = \tau \cdot A \cdot K^\alpha \cdot E^{1-\alpha}$

Expressada en termes per càpita, $e = \tau \cdot A \cdot k^\alpha \cdot e^{1-\alpha}$. Això és,

$$e = k \cdot (\tau \cdot A)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (1)$$

Si (1) s'afegeix a l'equació que descriu la dinàmica del capital per càpita,

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{s \cdot (1-\tau)}{1+n} \cdot A \cdot \left(\frac{e}{k} \right)^{1-\alpha} - \frac{\delta+n}{1+n} = \frac{s \cdot (1-\tau)}{1+n} \cdot A \cdot (\tau \cdot A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\delta+n}{1+n} = \\ &= \frac{s \cdot (1-\tau)}{1+n} \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\delta+n}{1+n}. \end{aligned}$$

Si (1) s'introdueix en l'equació que descriu la producció per càpita,

$$y = A \cdot k^\alpha \cdot e^{1-\alpha} = A \cdot k^\alpha \cdot \left(k \cdot (\tau \cdot A)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1-\alpha} = A \cdot k \cdot (\tau \cdot A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot k.$$

Aquesta expressió és equivalent a la funció de producció per càpita del model AK de creixement, amb la diferència que la constant A del model AK ara pren la forma $A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

Atès que y és proporcional a k , com en el model AK, se segueix que la taxa de creixement g_y del producte per càpita y és igual a la taxa de creixement g_k del capital per càpita k . Com a resultat,

$$g_y = g_k = \frac{s \cdot (1 - \tau)}{1 + n} \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\delta + n}{1 + n}.$$

Una implicació immediata d'aquesta equació és que $g_y > 0$ si, i només si,

$$s \cdot (1 - \tau) \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > \delta + n;$$

això és, si, i només si,

$$s > \frac{\delta + n}{(1 - \tau) \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

Aquest resultat evidencia que una taxa d'estalvi s suficientment elevada asseguraria el creixement sostingut del producte per càpita y , a diferència de la convergència a zero de la taxa g_y en el model de Solow i Swan.

Una pregunta interessant des del punt de vista de la política industrial seria determinar el valor de τ que maximitza la taxa de creixement g_y de y .

Exercici. Calcula la derivada parcial de $(\delta + n) / \left((1 - \tau) \cdot A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right)$ respecte de τ i interpreta el resultat en el context del problema de garantir que $g_y > 0$.