

Política industrial a petita escala

- Els models a continuació estan motivats per la següent qüestió: en quines condicions mesures de política industrial indueixen les empreses a assolir els objectius de la política?
- Per a simplificar, l'objectiu de la política industrial s'assumeix que és incrementar la despesa en innovació que fan les empreses. Aquest objectiu es podria considerar com a instrumental per a assolir objectius relacionats de política industrial, com
 - augmentar la internacionalització de les empreses domèstiques;
 - millorar la competitivitat de l'economia;
 - impulsar la productivitat de determinats sectors productius;
 - estimular transformacions econòmiques estructurals (transició energètica, transformació digital, expansió de la mecanització i la robotització, aplicació de la intel·ligència artificial, adopció de noves tecnologies, creació de nous sectors productius...);
 - apaivagar externalitats negatives (escalfament global, contaminació, destrucció d'ecosistemes, residus no biodegradables...);
 - promoure feines de qualitat ('good jobs'); i/o
 - reduir les desigualtats territorials (reequilibrar territorialment l'economia domèstica).
- Més específicament, l'activitat d'innovació es concreta en la reducció del cost de producció (atès que els objectius d'internacionalització, competitivitat, productivitat, transformació, protecció mediambiental, ocupació i desenvolupament territorial estan relacionats amb estalvis de costos de producció).
- Els models es construeixen articulant les respostes a les següent qüestions.
- Primera qüestió: quina és l'estructura de mercat? Les respostes típiques són quatre: competència perfecta, monopoli, duopoli segons Cournot (competència en la quantitat) i duopoli segons Bertrand (competència en el preu).
- Segona qüestió: com es concreta la despesa en innovació en la reducció de costos de producció? Aquesta qüestió porta a formular una funció ampliada c de cost de producció que, a més del volum de producció q , fa dependre el cost de la despesa I en innovació (per a abreviar, I s'anomenarà 'inversió'). La naturalesa de la funció c fa que depengui positivament de q (més producció, més cost) i negativament d' I (més inversió, menys cost). Això vol dir que la derivada parcial de la funció de cost respecte de q és positiva i respecte d' I és negativa. En relació amb la segona derivada, totes les possibilitats són justificables: derivada segona de c respecte de q positiva (cost marginal creixent o funció c convexa respecte de q), derivada segona de c respecte de q negativa (cost marginal decreixent o funció c còncava respecte de q) o derivada segona de c respecte de q constant (cost marginal constant o funció c lineal respecte de q). El mateix s'aplicaria I : com a funció d' I , la funció de cost podria assumir-se convexa (la inversió cada cop redueix més el cost de producció), còncava (la inversió cada cop redueix menys el cost de producció) o lineal (cada unitat d'inversió redueix el cost el mateix).

- Funció 1. Funció de cost lineal en la producció i la inversió:

$$c(q, I) = \begin{cases} (c_0 - \alpha I)q & \text{si } I \leq \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \\ c_1 q & \text{si } I > \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

on α , c_0 i $c_1 < c_0$ són constants positives, I és la inversió (despesa en innovació) i q és la producció. Segons aquesta funció, c_0 seria el cost de produir una unitat quan no hi ha inversió ($I = 0$), c_1 és el cost més baix de produir una unitat que es pot assolir amb inversió (la inversió no pot reduir el cost per sota de c_1) i α mesura l'efectivitat de la inversió (cada unitat d'inversió redueix α unitats el cost). La funció estableix que la inversió per damunt de $\frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ és estèril (ja que invertir $I = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ redueix el cost a c_1 , que és el valor més petit a què es pot reduir amb la inversió).

- Funció 2. Funció de cost quadràtica en la producció i lineal en la inversió:

$$c(q, I) = \begin{cases} (c_0 - \alpha I)q^2 & \text{si } I \leq \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \\ c_1 q^2 & \text{si } I > \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \end{cases} \quad (2)$$

on α , c_0 i $c_1 < c_0$ són constants positives, I és la inversió (despesa en innovació) i q és la producció.

- Funció 3. Funció de cost quadràtica (i còncaua) en la inversió i lineal en la producció:

$$c(q, I) = \begin{cases} (c_0 - \alpha I^2)q & \text{si } I \leq \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \\ c_1 q & \text{si } I > \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \end{cases} \quad (3)$$

on α , c_0 i $c_1 < c_0$ són constants positives, I és la inversió (despesa en innovació) i q és la producció.

- Funció 4. Funció de cost quadràtica (i convexa) en la inversió i lineal en la producció:

$$c(q, I) = \frac{q}{\alpha + I}$$

on α és una constant positiva, I és la inversió (despesa en innovació) i q és la producció. En aquest cas, $1/\alpha$ representa el valor c_0 dels casos anteriors i zero seria el valor c_1 (assolible en el cas impossible d'una inversió sense límit).

- Tercera qüestió: quina és la mesura de política que implementa el govern? Com en les qüestions anteriors, les respostes són múltiples. Una opció és que la política es financii en el mercat afectat per la política; una altra, és que altres sectors de l'economia financiin la política. Se seleccionen quatre polítiques.
- Política 0: subvenció a la inversió finançada amb recursos del govern prèviament disponibles.
- Política 1: crèdit fiscal. La inversió redueix els impostos a pagar.
- Política 2: subvenció a la inversió finançada amb un impost indirecte (impost sobre el consum).

- Política 3: subvenció a la inversió finançada amb un impost directe (impost sobre el benefici).
- L'anàlisi (la construcció del model) es podria ampliar considerant més qüestions.
 - Es tracta d'un mercat domèstic o internacional? En aquest cas, s'obre la possibilitat que una política que no fos efectiva a escala domèstica ho fos si hi ha un mercat global prou gran com per a què la política domèstica no l'afectés.
 - La política és universal (afecta totes les empreses del mercat) o específica (s'aplica a només una empresa o a un subconjunt del total)?
 - Regles alternatives de fixació de preus (per exemple, assumir que el preu de mercat cobreix el cost mitjà, no només el cost marginal).
- A continuació es consideren només alguns dels models que es podrien construir combinant les respostes a les qüestions anteriors. Es deixa analitzar les altres possibilitats com a exercici.

1. Competència perfecta i innovació amb cost lineal

- El mercat d'un producte és un mercat de competència perfecta.
- La funció de demanda de mercat és

$$p = a - b \cdot q$$

on a i b són constants positives, p és el preu del producte i q és la quantitat produïda i venuda.

- Hi ha n productors, tots ells iguals. Cada productor decideix el volum d'una despesa I que s'interpreta com una inversió en innovació capaç de reduir el cost de producció.
- Tots els productors tenen la mateixa funció de cost lineal en la producció i la inversió (1).
- La funció de benefici de cada productor i és

$$\pi(q_i, I) = pq_i - c(q_i, I) - I = (p - c_0 + \alpha I)q_i - I.$$

on pq_i és l'ingrés per la venda de la producció, $c(q_i, I)$ el cost de la producció quan s'ha fet la inversió I en innovació, inversió que redueix el benefici en I unitats.

- La funció d'oferta de cada productor i s'obté de la maximització de $\pi(q_i, I)$.
- Si $q_i = I = 0$, aleshores $\pi(q_i, I) = p \cdot 0 - c(0, 0) - 0 = 0$. Atès que no produir ni invertir assegura un benefici de zero, la solució al problema de maximitzar $\pi(q_i, I)$ no pot comportar un benefici negatiu.
- Si algun valor $q_i > 0$ maximitza $\pi(q_i, I)$ s'ha de satisfer

$$0 = \frac{d\pi}{dq_i} = p - c_0 + \alpha I$$

o

$$p = c_0 - \alpha I.$$

- El benefici seria

$$\pi = (p - c_0 + \alpha I)q_i - I = ((c_0 - \alpha I) - c_0 + \alpha I)q_i - I = -I.$$

- Conclusió: una inversió positiva comporta un benefici negatiu. Atès que no produir ni invertir (o produir i no invertir) assegura un benefici zero, cap productor no invertiria.
- Aquest model il·lustra la idea que l'estructura de mercat de competència perfecta no incentiva la despesa en innovació: si tothom inverteix per a reduir costs, la reducció de costs es transforma completament en reducció de preu i, com a conseqüència, s'incorre en una despesa I que no comporta augment de benefici i el resultat net de la inversió és una pèrdua.
- Aquesta situació és interessant des del punt de vista de la política industrial: hi ha alguna mesura que generi inversió? Per exemple, seria efectiva la Política 0? En concret, si el govern finança completament la inversió, la funció de benefici de cada productor seria

$$\pi = (p - c_0 + \alpha I)q_i.$$

- Aparentment, finançar completament la inversió la incentivaria. Però ser un productor en un mercat competitiu fa que tota la reducció de cost de la inversió es traslladi al preu. Específicament, l'anàlisi prèvia continua sent vàlida i el preu després de la inversió seria

$$p = c_0 - \alpha I$$

raó per la qual, per a cada productor,

$$\pi = 0.$$

- En suma: invertir o no invertir deixa cada productor sense benefici. Per tant, la política no genera un incentiu a invertir.
- Si el mercat domèstic estigués integrat en un mercat global del producte es podria argumentar que els canvis en el mercat domèstic (la inversió) no afectarien significativament el preu del mercat global. En aquest cas, el preu p en la funció de benefici

$$\pi = (p - c_0 + \alpha I)q_i - I$$

no es modificaria significativament. Per simplificar, és raonable assumir que $p = c_0$: el preu en el mercat global coincideix amb el cost marginal de produir quan no hi ha inversió. Així:

- Si els productors es financen ells mateixos la inversió, hi hauria inversió positiva si

$$(p - c_0 + \alpha I)q_i > I$$

$$\alpha I q_i > I$$

$$\alpha q_i > 1.$$

- Si el govern finança completament la inversió de tot productor, hi hauria inversió positiva si

$$(p - c_0 + \alpha I)q_i > 0$$

$$\alpha I q_i > 0$$

que es compliria sempre.

- En definitiva: si el país és petit i el mercat considerat està completament integrat en un mercat global perfectament competitiu, finançar la inversió donaria incentiu a les empreses domèstiques a invertir. I si el govern no finança la inversió, l'incentiu encara existiria si el paràmetre α d'efectivitat de la inversió és suficientment gran ($\alpha > 1/q_i$).
- Conclusions anàlogues s'obtindrien si el mercat continua sent domèstic però el beneficiari de la política (o l'executor de la inversió) fos només un productor, perquè en aquest cas el preu de mercat no variaria significativament: un productor en un mercat competitiu no té influència destacable en el preu. De fet, l'important per a justificar que es fes la inversió no és que el productor no tingui influència en el preu sinó que el productor cregués que no la té. En aquest cas, la funció de benefici realment seria una funció de benefici expectat (construïda sobre la base que el preu de mercat p no es veu afectat per les pròpies decisions). Després de la decisió d'inversió podria ser que el benefici fos inferior a l'expectat, però el que comptaria en l'anàlisi en la decisió feta sobre la base de l'expectativa, no de la realització de l'expectativa (en el moment de decidir si fer la inversió la realització és desconeguda).
- Una altra opció d'anàlisi passa per modificar el mecanisme de formació del preu en el mercat. Per exemple si el preu coincideix amb el cost mitjà de producció, el benefici d'un productor quan tots ells fan la mateixa inversió seria

$$\pi = (p - c_0 + \alpha I)q_i - I$$

on $p = \frac{(c_0 - \alpha I)q_i + I}{q_i} = (c_0 - \alpha I) + \frac{I}{q_i}$, $(c_0 - \alpha I)q_i$ representa el cost variable i I representa el cost fix. En aquest cas,

$$\pi = \left((c_0 - \alpha I) + \frac{I}{q_i} - c_0 + \alpha I \right) q_i - I = 0.$$

- Es dedueix que un mercat on el preu compensa el cost mitjà no desincentiva la inversió (s'ha mostrat abans que quan el preu compensa el cost marginal la inversió genera un benefici negatiu), però tampoc no la incentiva.

2. Competència perfecta i innovació amb cost quadràtic

- El mercat d'un producte és competitiu.
- La funció de demanda de mercat és

$$p = a - bq^d$$

on a i b són constants positives, p és el preu del producte i q^d és la quantitat total demandada.

- Hi ha n productors, tots ells iguals. Cada productor decideix el volum d'una despesa I que s'interpreta com una inversió en innovació capaç de reduir el cost de producció.
- La funció de cost de producció de cada productor i és

$$c(q_i, I) = \begin{cases} (c_0 - \alpha I)q_i^2 & \text{si } I \leq \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \\ c_1 q_i^2 & \text{si } I > \frac{c_0 - c_1}{\alpha} \end{cases}.$$

on α i c_0 són constants positives, I és la despesa en innovació i q_i és la producció d' i .

- El paràmetre c_0 és el cost de produir una unitat sense fer cap despesa I en innovació. Quan es fa la despesa I el cost c_0 de produir una unitat es redueix en αI unitats. La despesa en innovació no pot reduir c_0 per sota d'un cert valor $c_1 > 0$. El valor més petit de la despesa que fa decreixer c_0 fins a $c_1 < c_0$ és $I^+ = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$. Per damunt d' I^+ la despesa en innovació és estèril i el cost de produir una unitat es manté en c_1 . Per tant, entenent que $0 \leq I \leq I^+$, pot assumir-se que la funció de cost és

$$c(q_i, I) = (c_0 - \alpha I)q_i^2.$$

- La funció de benefici de cada productor i és

$$\pi(q_i, I) = pq_i - c(q_i, I) - I.$$

on pq_i és l'ingrés per la venda de la producció, $c(q_i, I)$ el cost de la producció quan s'ha assumit la despesa I en innovació i la despesa I redueix el benefici en I unitats.

- La funció d'oferta de cada productor i s'obté de la maximització de $\pi(q_i, I)$.
- Si $q_i = I = 0$, aleshores $\pi(q_i, I) = p \cdot 0 - c(0, 0) - 0 = 0$. Atès que no produir ni invertir assegura un benefici de zero, la solució al problema de maximitzar $\pi(q_i, I)$ no pot comportar un benefici negatiu.
- Si algun valor $q_i > 0$ maximitza $\pi(q_i, I)$ s'ha de satisfer

$$0 = \frac{d\pi}{dq_i} = p - \frac{dc}{dq_i} = p - 2q_i(c_0 - \alpha I).$$

- D'aquesta condició, fent $A = c_0 - \alpha I$ (que per definició és un valor positiu), s'obté la funció d'oferta del productor i :

$$q_i = \frac{p}{2A}.$$

- Atès que tots els n productors s'assumeixen iguals, la funció d'oferta de mercat és

$$q^s = nq_i = \frac{np}{2A}.$$

- L'equilibri de mercat resulta de les condicions

$$\text{funció de demanda de mercat} \quad p = a - bq^d$$

$$\text{funció d'oferta de mercat} \quad q^s = np/2A$$

$$\text{equilibri de mercat} \quad q^d = q^s.$$

- El preu d'equilibri satisfà

$$p = a - bq^d = a - b \frac{np}{2A}$$

i és

$$p = \frac{2Aa}{2A + bn}.$$

- La producció del productor i és

$$q_i = \frac{p}{2A} = \frac{1}{2A} \frac{2Aa}{2A + bn} = \frac{a}{2A + bn}$$

i el seu benefici és

$$\pi(q_i, I) = p \frac{p}{2A} - A \left(\frac{p}{2A} \right)^2 - I = \frac{p^2}{2A} - \frac{p^2}{4A} - I = \frac{p^2}{4A} - I = \frac{Aa^2}{(2A + bn)^2} - I \quad (4)$$

o

$$\pi(q_i, I) = (c_0 - \alpha I) \left(\frac{a}{2c_0 + bn - 2\alpha I} \right)^2 - I.$$

- Si $I = 0$, llavors $A = c_0$ i el benefici és

$$\pi(q_i, 0) = \frac{c_0 a^2}{(2c_0 + bn)^2} = c_0 \left(\frac{a}{2c_0 + bn} \right)^2 > 0. \quad (5)$$

- A diferència del cas amb funció de cost lineal, el benefici sense inversió és positiu.
- Per tot l'anterior, el productor i triarà una despesa I positiva si

$$\frac{Aa^2}{(2A + bn)^2} - I > \frac{c_0 a^2}{(2c_0 + bn)^2}$$

o

$$I < a^2 \left(\frac{A}{(2A + bn)^2} - \frac{c_0}{(2c_0 + bn)^2} \right). \quad (6)$$

- Com que la verificació en general de la desigualtat (6) és laboriosa, val la pena considerar alguna de les polítiques proposades. En concret, sigui la següent versió de la Política 1:

‘Tot productor ha de pagar l'impost de quantia fixa T ,
del qual es pot descomptar la despesa I feta en inversió.’

- Si cap productor no inverteix, el benefici π^0 és (5) menys T :

$$\pi^0 = c_0 \left(\frac{a}{2c_0 + bn} \right)^2 - T.$$

- Si tots els productors inverteixen I , el benefici π^I és (5) menys $(T - I)$:

$$\pi^I = \frac{Aa^2}{(2A + bn)^2} - I - (T - I) = A \left(\frac{a}{2A + bn} \right)^2 - T.$$

- D'aquí, invertir és millor que no invertir si

$$\begin{aligned} \pi^I &> \pi^0 \\ A \left(\frac{a}{2A + bn} \right)^2 - T &> c_0 \left(\frac{a}{2c_0 + bn} \right)^2 - T \\ A(2c_0 + bn)^2 &> c_0(2A + bn)^2 \end{aligned}$$

$$4Ac_0^2 + 4Ac_0bn + Ab^2n^2 > 4c_0A^2 + 4c_0Abn + c_0b^2n^2$$

$$4Ac_0^2 + Ab^2n^2 > 4c_0A^2 + c_0b^2n^2$$

$$(c_0 - A)4Ac_0 > (c_0 - A)b^2n^2$$

$$\alpha I \cdot 4Ac_0 > \alpha I \cdot b^2n^2$$

$$4(c_0 - \alpha I)c_0 > b^2n^2$$

$$4c_0^2 > b^2n^2 + 4c_0\alpha I$$

$$I < \frac{c_0}{\alpha} - \frac{b^2n^2}{4c_0\alpha}$$

$$I < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{4c_0^2 - b^2n^2}{4c_0} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{(2c_0 + bn)(2c_0 - bn)}{4c_0}.$$

- La desigualtat estableix que fer la inversió és millor que no fer-la si la inversió és inferior a un cert límit. Per a què la condició tingui sentit en el model cal que el límit sigui positiu; això és,

$$c_0 > \frac{bn}{2}.$$

- Resumint: un crèdit fiscal a la inversió és efectiu per a incrementar la inversió si el cost de produir sense inversió és suficientment gran (c_0 suficientment gran en relació amb el nombre n de productors i en relació amb la sensibilitat b del preu a la quantitat demanda). A més, el nivell d'inversió no pot superar un límit $\frac{c_0}{\alpha} - \frac{b^2n^2}{4c_0\alpha}$ que depèn de c_0 , b , n i l'efectivitat α de la inversió. Aquest límit:

- decreix amb l'efectivitat α ;
- decreix amb la sensibilitat b ;
- decreix amb el nombre n de productors;
- creix amb el cost bàsic c_0 .

- La Política 0 (el govern paga tota la inversió) tindria els mateixos efectes. El benefici invertint seria, amb $A = c_0 - \alpha I > 0$,

$$A \left(\frac{a}{2A + bn} \right)^2$$

i el de no invertir

$$c_0 \left(\frac{a}{2c_0 + bn} \right)^2.$$

Amb la Política 1, a cada terme es restava una constant T . Per tant, el problema de determinar quan el primer valor és superior al segon és idèntic amb les dues polítiques. Les conclusions són també les mateixes. En particular, una lliçó negativa és que ni el govern assumint el pagament de tota la inversió es garanteix que els productors facin inversió.

3. Monopoli i innovació amb cost lineal sense política industrial

- El mercat d'un producte és un monopoli.
- La funció de demanda de mercat és

$$p = a - b \cdot q$$

on a i b són constants positives, p és el preu del producte i q és la quantitat produïda i venuda.

- El monopolista pot reduir el cost mitjà de producció fent una despesa I , que s'interpreta com una inversió en innovació que genera reducció en el cost de producció.
- La funció de cost de producció és (1) del monopolista, que es defineix sobre la base de dos valors c_0 i c_1 , amb $c_0 > c_1 > 0$, i un paràmetre α d'efectivitat de la inversió en reduir el cost.
- El cost mitjà c_0 és el cost si $I = 0$, això és, si no es fa despesa en innovació. El cost mitjà c_1 és el cost més baix que es pot assolir amb la innovació. Per a $I \leq \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$, la funció de cost mitjà del monopolista pren la forma

$$c(I) = c_0 - \alpha I$$

i, per a $I > \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$, la funció de cost mitjà del monopolista és la funció constant

$$c(I) = c_1$$

que expressa el fet que hi ha un límit a l'efectivitat de la innovació: per damunt d'un cert valor, la despesa en innovació no pot reduir més el cost mitjà de producció del producte.

- El monopolista tria primer I i després q amb l'objectiu de maximitzar la funció de benefici

$$\pi(q, I) = pq - (c_0 - \alpha I)q - I$$

on pq és l'ingrés per la venda de la quantitat q de producte, $(c_0 - \alpha I)$ és el cost mitjà de producció quan el monopolista esmerça l'import I en innovació, $(c_0 - \alpha I)q$ és el cost total de producció i I és la despesa en innovació.

- Cas 1. La inversió pren el valor mínim $I = 0$. En aquest cas, la maximització de π requereix

$$0 = \frac{d\pi}{dq} = \frac{dp}{dq}q + p - c_0 = -bq + (a - bq) - c_0 = a - c_0 - 2bq$$

o

$$q_0 = \frac{a - c_0}{2b}.$$

El benefici resultant és

$$\pi_0 = (p - c_0)q_0 = (a - c_0 - bq_0)q_0 = \frac{(a - c_0)^2}{2b} - \frac{b(a - c_0)^2}{4b^2} = \frac{(a - c_0)^2}{4b}.$$

- Cas 2. La inversió pren el valor màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ (una inversió superior és inútil). Ara el cost mitjà és c_1 i la maximització de π requereix

$$0 = \frac{d\pi}{dq} = \frac{dp}{dq}q + p - c_1 = -bq + (a - bq) - c_1 = a - c_1 - 2bq$$

o

$$q_1 = \frac{a - c_1}{2b}.$$

El benefici resultant és

$$\pi_1 = (p - c_1)q_1 - I_1 = (a - c_1 - bq_1)q_1 - I_1 = \frac{(a - c_1)^2}{2b} - \frac{b(a - c_1)^2}{4b^2} - I_1 = \frac{(a - c_1)^2}{4b} - \frac{c_0 - c_1}{\alpha}.$$

Proposició 1. Invertir el màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ genera un benefici superior a no invertir si

$$\alpha > \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}.$$

Demostració. Sigui $A = a - c_0$ i $B = a - c_1$. Per hipòtesi, $B > A > 0$. Tenir $\pi_1 > \pi_0$ equival a

$$\frac{(a - c_1)^2}{4b} - \frac{c_0 - c_1}{\alpha} > \frac{(a - c_0)^2}{4b}$$

i a

$$\frac{B^2}{4b} - \frac{B - A}{\alpha} > \frac{A^2}{4b}$$

i a

$$B^2\alpha - 4b(B - A) > A^2\alpha$$

i a

$$\alpha(B^2 - A^2) > 4b(B - A)$$

i a

$$\alpha > \frac{4b(B - A)}{B^2 - A^2} = \frac{4b(B - A)}{(B - A)(B + A)},$$

i a

$$\alpha > \frac{4b}{A + B},$$

que és resultat a demostrar. ■

- La demostració de la Proposició 1 també evidencia que el monopolista obté més benefici amb $I = 0$ que amb $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ si

$$\alpha < \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}.$$

- La igualtat $\alpha = \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}$ significa que el benefici es el mateix amb $I = 0$ que amb $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$.
- Exemple on $\pi_0 > \pi_1$: $a = 100$, $b = 1$, $c_0 = 50$, $c_1 = 40$ i $\alpha = 1/30$, ja que $625 = \pi_0 > \pi_1 = 600$.
- Exemple on $\pi_1 > \pi_0$: $a = 100$, $b = 1$, $c_0 = 50$, $c_1 = 10$ i $\alpha = 1/30$, ja que $825 = \pi_1 > \pi_0 = 625$.
- Així que una primera conclusió de l'anàlisi en un monopoli és que hi ha característiques del mercat que indueixen el monopolista a fer inversió (fins i tot, la màxima possible) sense el suport del govern. En competència, els productors no tenien incentiu a invertir (no es podien apropiat dels beneficis de la inversió, que anaven als consumidors per la reducció de preu).

“The second key idea that Arrow (1962) establishes is the so-called ‘Arrow replacement effect’. The Arrow replacement idea is important because it is framed as one of the classical answers to the question of how market structure affects innovation. In particular, the Arrow idea seems to be identified as one ‘pole’ of the competition/innovation debate — namely, as a key mechanism explaining why product market competition encourages innovation... Schumpeter (1942) classically forms the other ‘pole’ of this debate — i.e. the opposing view that actually (the prospect of) market power and monopoly profits is what spurs innovation (or that larger firms are otherwise a better home for innovation).

So what is the Arrow replacement effect? The basic idea of the replacement effect is that a monopolist has less incentive to innovate than a competitive firm, due to the monopolist’s financial interest in the status quo. As Arrow puts it: ‘The preinvention monopoly power acts as a strong disincentive to further innovation’. Indeed, in Arrow’s setup, for any given level of post-invention (‘ex post’) profits, the incentive to innovate will be decreasing in pre-invention (or ‘ex ante’) profits.”

Arrow, Kenneth (1962): “Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention”, a *The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors*, Princeton University Press, pp. 609-625.

Schumpeter, Joseph (1942): “The Process of Creative Destruction”, cap. VII, pp. 81-86 a *Capitalism, Socialism, and Democracy*, Harper & Row.

<https://jeffreyfossett.com/2020/06/05/arrow-replacement.html>

- Cas 3. La inversió pren un valor entre el mínim i el màxim. La maximització de π requereix

$$0 = \frac{d\pi}{dq} = \frac{dp}{dq}q + p - (c_0 - \alpha I) = -bq + (a - bq) - (c_0 - \alpha I) = a - c_0 + \alpha I - 2bq$$

o

$$\tilde{q} = \frac{a - c_0 + \alpha I}{2b}.$$

El preu

$$\tilde{p} = a - b\tilde{q} = \frac{a + c_0 - \alpha I}{2}.$$

El benefici resultant és

$$\tilde{\pi} = (\tilde{p} - c_0 + \alpha \tilde{I})\tilde{q} - \tilde{I} = \frac{(a - c_0 + \alpha \tilde{I})^2}{4b} - \tilde{I}.$$

Equivalentment,

$$\tilde{\pi} = \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha \tilde{I}}{4b} + \frac{\alpha^2 \tilde{I}^2}{4b} - \tilde{I}. \quad (7)$$

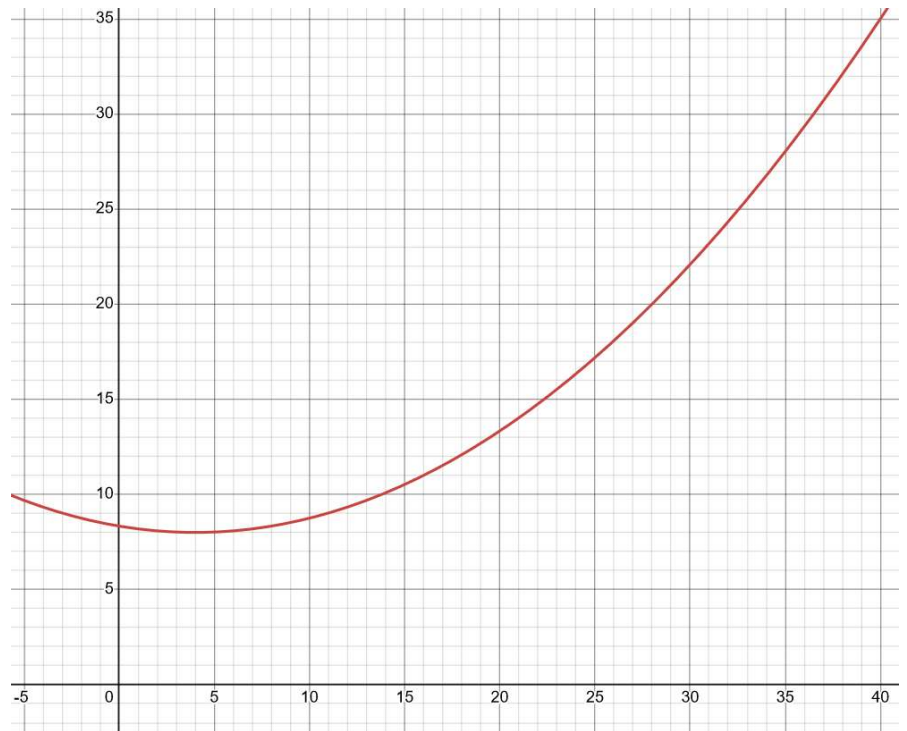
- De (7) es conclou que invertir per sota del màxim pot ser preferible a no invertir ($\tilde{\pi} > \pi_0$) si

$$\frac{2(a - c_0)\alpha\tilde{I}}{4b} + \frac{\alpha^2\tilde{I}^2}{4b} > \tilde{I}$$

o

$$2(a - c_0)\alpha + \alpha^2\tilde{I} > 4b. \quad (8)$$

- Exemple: $a = 100$, $c_0 = 80$, $c_1 = 40$, $b = 12$ i $\alpha = 1$. Si $I = 0$, $\pi_0 = \frac{(a-c_0)^2}{4b} = \frac{(100-80)^2}{48} = \frac{25}{3} \approx 8,33$. Si $\tilde{I} = 16$ el benefici resultant és $\tilde{\pi} = \frac{(a-c_0+\alpha\tilde{I})^2}{4b} - \tilde{I} = \frac{(100-80+16)^2}{48} - 16 = \frac{1296}{48} - 16 = 27 - 16 = 11 > \frac{25}{3} = \pi_0$. Aquests valors satisfan (8).



- La gràfica de la dreta (feta a <https://www.desmos.com/calculator>) representa la funció de benefici $\tilde{\pi} = \frac{(20+I)^2}{48} - \tilde{I}$ de l'exemple. La gràfica il·lustra el resultat numèric previ però també que no hi ha solució interior: el benefici es maximitza amb un valor extrem de la inversió. El valor màxim de la inversió de l'exemple és $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha} = \frac{80-40}{1} = 40$ amb benefici $\pi_1 = \frac{(a-c_1)^2}{4b} - \frac{c_0 - c_1}{\alpha} = \frac{(100-40)^2}{48} - 40 = \frac{3600}{48} - 40 = 75 - 40 = 35 > 11 = \tilde{\pi}$.

- Si es busca un màxim interior de (7) s'obté la condició de primer ordre de màxim

$$0 = \frac{d\tilde{\pi}}{d\tilde{I}} = \frac{2(a - c_0)\alpha}{4b} + \frac{2\alpha^2\tilde{I}}{4b} - 1$$

o

$$\tilde{I} = \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}.$$

- El problema és que el valor $\tilde{I} = \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$ determina un mínim i no un màxim de la funció de benefici (en l'exemple, seria $\tilde{I} = 4$). La raó és que no se satisfà la condició de segon ordre: que la derivada segona sigui negativa quan s'avalua en el valor candidat a màxim. En concret,

$$\frac{d^2\tilde{\pi}}{d\tilde{I}^2} = \frac{2\alpha^2}{4b} > 0.$$

Proposició 2. Invertir un valor positiu però inferior al màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ mai no maximitza el benefici.

Demostració. La funció de benefici és (7). La primera derivada

$$\frac{d\tilde{\pi}}{d\tilde{I}} = \frac{2(a - c_0)\alpha}{4b} + \frac{2\alpha^2\tilde{I}}{4b} - 1$$

és negativa si

$$\frac{2(a - c_0)\alpha}{4b} + \frac{2\alpha^2\tilde{I}}{4b} < 1$$

que equival a

$$\tilde{I} < \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}.$$

Per tant, el benefici decreix amb la inversió per a tot valor de la inversió $\tilde{I} < \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$. Així, si $\tilde{I} < \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$, el valor màxim del benefici s'assoliria amb $I = 0$ i no amb un valor interior del domini.

Per contra, el benefici creix amb la inversió per a tot valor de la inversió $\tilde{I} > \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$. Per això, si $\tilde{I} > \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$, el valor màxim del benefici s'assoliria amb el valor màxim I_1 admès i no amb un valor interior del domini.

Finalment, si $\tilde{I} = \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$, llavors la funció de benefici assoleix un mínim, perquè $\frac{d^2\tilde{\pi}}{d\tilde{I}^2} = \frac{2\alpha^2}{4b} > 0$. ■

4. Monopoli amb política industrial finançada amb fons propis del govern

- La conclusió de l'anàlisi de la secció §3 és que un monopolista amb funció de cost lineal en la producció i la inversió tria no invertir o invertir el màxim. Per consegüent, la política industrial tindria sentit quan el monopolista no inverteix. Per la Proposició 1 el monopolista tria $I = 0$ si $\alpha < \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}$, això és, si
 - l'efectivitat α és suficientment petita; o
 - la sensibilitat b és suficientment gran; o
 - és suficientment petita la diferència $a - c_0$ entre el que els consumidors valoren la primera unitat i el cost de produir-la sense innovació; o
 - és suficientment petita la diferència $a - c_1$ entre el que els consumidors valoren la primera unitat i el cost de produir-la amb màxima innovació.
- En aquesta secció es considera la següent política:
 - el govern finança amb fons propis el percentatge $1 - s$ de la inversió del monopolista (amb $0 \leq s < 1$) només si $\alpha < \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}$ (de manera que el monopolista paga la part s).

- Ara el monopolista maximitza (7) amb el terme final $\tilde{I}$ reemplaçat per $s\tilde{I}$:

$$\tilde{\pi} = \frac{(a - c_0 + \alpha\tilde{I})^2}{4b} - s\tilde{I} = \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha\tilde{I}}{4b} + \frac{\alpha^2\tilde{I}^2}{4b} - s\tilde{I}.$$

- En el cas extrem que el govern finança tota la inversió ($s = 0$), se segueix que el monopolista sempre inverteix el màxim: amb $s = 0$,

$$\tilde{\pi} = \frac{(a - c_0 + \alpha\tilde{I})^2}{4b}$$

i la funció depèn positivament d' $\tilde{I}$.

- Si $s > 0$, els resultats de §3 continuen sent vàlids. Concretament, per a què no invertir sigui l'opció triada pel monopolista és suficient demostrar que $\tilde{\pi} > \pi_0$. Atès que

$$\tilde{\pi} = \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha\tilde{I}}{4b} + \frac{\alpha^2\tilde{I}^2}{4b} - s\tilde{I}.$$

n'hi ha prou amb tenir

$$\frac{2(a - c_0)\alpha\tilde{I}}{4b} + \frac{\alpha^2\tilde{I}^2}{4b} > s\tilde{I}$$

$$2(a - c_0)\alpha + \alpha^2\tilde{I} > 4bs.$$

- Sobre aquesta base la introducció del paràmetre $0 < s < 1$ equival a una reducció del paràmetre b en el model original de §3. En paral·lel, una reducció de b fa que la condició $\alpha < \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}$ que avala triar $I = 0$ sigui més difícil de complir. En suma, la política de finançament, encara que parcial, contribueix a eliminar casos en què el monopolista tria no invertir. La Proposició 3 (la nova versió de la Proposició 1) estableix que com més petita la part s que paga el monopolista més fàcil és que inverteixi el màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$.

Proposició 3. Quan el monopolista paga la proporció positiva $s < 1$, invertir el màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ genera un benefici superior a no invertir si

$$\alpha > \frac{4bs}{2a - c_0 - c_1}.$$

Demostració. Ara la funció de benefici invertint el màxim és

$$\pi_1^s = (p - c_1)q_1 - sI_1 = \frac{(a - c_1)^2}{4b} - \frac{s(c_0 - c_1)}{\alpha}.$$

Sigui $A = a - c_0$ i $B = a - c_1$. Per hipòtesi, $B > A > 0$. Tenir $\pi_1^s > \pi_0$ equival a

$$\frac{(a - c_1)^2}{4b} - \frac{s(c_0 - c_1)}{\alpha} > \frac{(a - c_0)^2}{4b}$$

$$\frac{B^2}{4b} - \frac{s(B - A)}{\alpha} > \frac{A^2}{4b}$$

$$B^2\alpha - 4bs(B - A) > A^2\alpha$$

$$\alpha(B^2 - A^2) > 4bs(B - A)$$

$$\alpha > \frac{4bs(B - A)}{B^2 - A^2} = \frac{4bs(B - A)}{(B - A)(B + A)} = \frac{4bs}{A + B}. \blacksquare$$

La Proposició 3 també val per a $s = 0$. En aquest cas, la condició seria $\alpha > 0$, que és certa sempre i, per tant, com s'ha argumentat a l'inici de la secció, invertir zero no és solució.

5. Monopoli amb política industrial finançada amb un impost sobre el consum

- La política a analitzar té les següents característiques:
 - el govern paga el percentatge $1 - s$ de la inversió I del monopolista (amb $0 \leq s < 1$) i el monopolista en paga la proporció s ;
 - el govern obté el finançament d'un impost sobre el consum (on els consumidors paguen la quantia fixa $\tau > 0$ per unitat comprada del bé); i
 - el govern autofinança la política: l'ingrés τq de l'impost coincideix amb la inversió finançada $(1 - s)I$ pel govern (si $I = 0$ s'entén que $\tau = 0$).

- La funció de demanda passa a ser

$$p + \tau = a - bq.$$

- Com que llavors $p = a - \tau - bq$ i el cost de la despesa és sI en comptes d' I , els càlculs de §3 i §4 són vàlids reemplaçant ' a ' per ' $a - \tau$ ' i ' $-I$ ' per ' $-sI$ '. En conseqüència, la funció de benefici del monopolista és

$$\pi = \frac{(a - c_0 + \alpha I - \tau)^2}{4b} - sI$$

amb la condició addicional d'equilibri pressupostari de la política

$$\tau q = (1 - s)I.$$

- Com que la producció satisfà

$$q = \frac{a - c_0 + \alpha I - \tau}{2b},$$

la condició pressupostària esdevé

$$\tau \frac{a - c_0 + \alpha I - \tau}{2b} = (1 - s)I.$$

i així

$$s = 1 - \tau \frac{a - c_0 + \alpha I - \tau}{2bI} = \frac{(2b - \tau\alpha)I + \tau^2 - \tau(a - c_0)}{2bI}. \quad (9)$$

- La condició (9) deixa un grau de llibertat en el model per a política: el govern pot triar l'impost τ però aleshores la proporció s que s'ha de finançar el monopolista queda determinada. També es podria interpretar a la inversa: el govern pot triar s i llavors no hi ha marge per a escollir τ .
- Combinat l'última equació amb la funció de benefici

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{(a - c_0)^2}{4b} + \frac{2(a - c_0)(\alpha I - \tau)}{4b} + \frac{(\alpha I - \tau)^2}{4b} - \frac{(2b - \tau\alpha)I + \tau^2 - \tau(a - c_0)}{2b} \\ \pi &= \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha I}{4b} + \frac{(\alpha I - \tau)^2}{4b} - \frac{2(2b - \tau\alpha)I + 2\tau^2}{4b} \\ \pi &= \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha I}{4b} + \frac{\alpha^2 I^2 + \tau^2 - 2\tau\alpha I}{4b} - \frac{4bI - 2\tau\alpha I + 2\tau^2}{4b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi &= \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha I}{4b} + \frac{\alpha^2 I^2}{4b} - \frac{4bI + \tau^2}{4b} \\ \pi &= \pi_0 + \frac{2(a - c_0)\alpha I}{4b} + \frac{\alpha^2 I^2}{4b} - I - \frac{\tau^2}{4b}.\end{aligned}\tag{10}$$

- L'expressió (10) amb $\tau = 0$ esdevé (7), la funció de benefici quan no hi ha cap política (per (9), $\tau = 0$ implica $s = 1$: sense impost, el monopolista es paga ell mateix la inversió). Hi ha una interpretació interessant de (10): finançar part de la inversió del monopolista mitjançant un impost sobre el consum és com si el monopolista s'hagués de pagar tota la inversió i, a més, un impost fix $\frac{\tau^2}{4b}$.
- La política té doncs un efecte pervers: amb la política finançada mitjançant un impost sobre els consumidors el benefici del monopolista derivat de la inversió és inferior al benefici sense política (hi ha la pèrdua $\frac{\tau^2}{4b}$).

Proposició 4. *La política de finançar una part de la inversió mitjançant un impost sobre el consum no modifica el problema de decisió del monopolista: la decisió del monopolista amb la política és la mateixa que sense.*

Demostració. La demostració és idèntica a la de la Proposició 2. La funció de benefici és (10). La primera derivada

$$\frac{d\pi}{dI} = \frac{2(a - c_0)\alpha}{4b} + \frac{2\alpha^2 I}{4b} - 1$$

és negativa si

$$\frac{2(a - c_0)\alpha}{4b} + \frac{2\alpha^2 I}{4b} < 1$$

que equival a

$$I < \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}.$$

D'una banda, el benefici decreix amb la inversió per a tot valor de la inversió $I < \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$. Així, si $I < \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$, el valor màxim del benefici s'assoleix amb $I = 0$, igual que succeïa sense política.

De l'altra, el benefici creix amb la inversió per a tot valor de la inversió $I > \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$. Per això, si $I > \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$, el valor màxim del benefici s'assoleix amb el valor màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ admès, igual que succeïa sense política.

Si $I = \frac{2b - (a - c_0)\alpha}{\alpha^2}$, la funció de benefici assoleix un mínim, perquè $\frac{d^2\pi}{dI^2} = \frac{2\alpha^2}{4b} > 0$. ■

- Com a corol·lari de la Proposició 4, aquesta política mai no faria canviar la decisió del monopolista de no invertir i, a més, té un cost per al monopolista representat per una pèrdua de benefici igual a $\frac{\tau^2}{4b}$. Es deixa com a exercici respondre a la següent pregunta: hi ha algun valor de τ tal que, sense política, el monopolista tria I_1 i amb la política tria $I = 0$?

6. Monopoli i duopoli de Cournot amb cost lineal

- On hi ha més inversió sense polítiques que la promoguin, en un monopoli o un duopoli?
- La funció de benefici del monopolista, amb funció de cost (1), és

$$\pi^m = \frac{(a - c_0 + \alpha I)^2}{4b} - I.$$

- En el model de Cournot amb duopolistes idèntics i funció de cost (1), la funció de benefici de cada duopolista és

$$\pi^c = \frac{(a - c_0 + \alpha I)^2}{9b} - I.$$

- Una primera implicació d'aquests resultats és el monopolista deriva més benefici que un duopolista de la mateixa inversió: si monopolista i cada duopolista inverteixen I , aleshores

$$\pi^m - \pi^c = \left(\frac{(a - c_0 + \alpha I)^2}{4b} - I \right) - \left(\frac{(a - c_0 + \alpha I)^2}{9b} - I \right) = \frac{5(a - c_0 + \alpha I)^2}{36b} > 0.$$

- Una segona implicació és que monopolista i duopolistes, quan inverteixen, fan la mateixa inversió. En el cas del monopolista,

$$\pi^m = \pi_0^m + \frac{2(a - c_0)\alpha I}{4b} + \frac{\alpha^2 I^2}{4b} - I$$

on $\pi_0^m = \frac{(a - c_0)^2}{4b}$ és el benefici de no invertir.

- Tercera implicació: un monopolista mai no inverteix menys que un duopolista i en ocasions n'inverteix més.
- Per a cada duopolista,

$$\pi^c = \pi_0^c + \frac{2(a - c_0)\alpha I}{9b} + \frac{\alpha^2 I^2}{9b} - I$$

on $\pi_0^c = \frac{(a - c_0)^2}{9b}$ és el benefici de no invertir.

Proposició 5. Per a cada duopolista, invertir el màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ crea un benefici superior a no invertir si

$$\alpha > \frac{9b}{2a - c_0 - c_1} = \frac{9b}{(a - c_0) + (a - c_1)}.$$

Demostració. La demostració és anàloga a la de la Proposició 1 i es deixa com a exercici. ■

Proposició 6. Un duopolista mai no inverteix més que un monopolista. Específicament:

- si $\alpha < \frac{4b}{2a - c_0 - c_1}$ ni monopolista ni duopolistes inverteixen;
- si $\frac{4b}{2a - c_0 - c_1} < \alpha < \frac{9b}{2a - c_0 - c_1}$ el monopolista inverteix $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$ i cap duopolista no inverteix;
- si $\alpha > \frac{9b}{2a - c_0 - c_1}$ el monopolista i cada duopolista inverteixen $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$.

Demostració. Proposició 1 i Proposició 5. ■

7. Duopoli de Bertrand amb innovació

- En el model de Bertrand dos duopolistes fixen el preu i (assumint que no hi ha restriccions de capacitat) qui fixa el preu inferior satisfà tota la demanda; si el preu és igual, cadascun satisfà la meitat de la demanda total.
- Per a simplificar, la demanda total és el valor constant q .
- La funció de cost de cada duopolista és (1).
- El preu és un múltiple d'un valor mínim ε : l'augment més petit possible del preu és ε i la reducció més petita possible també és ε .
- Inicialment, en el període $t = 0$, no hi ha inversió i cada duopolista fixa el mateix preu $p = c_0$. El benefici de cada duopolista és zero. En cadascun dels següents períodes només un duopolista pren decisions; l'altre manté les decisions del període anterior.
- En $t = 1$ un duopolista (duopolista 1) considera invertir i reduir el preu ε unitats. La seva funció de benefici seria

$$\pi_1 = ((c_0 - \varepsilon) - c_0 + \alpha I)q - I = (\alpha I - \varepsilon)q - I = I(\alpha q - 1) - \varepsilon q.$$

- Cas 1: $\alpha I < \varepsilon$. El benefici $\pi_1 = (\alpha I - \varepsilon)q - I$ seria negatiu i cap reducció del preu no faria que valgués la pena invertir. Amb $\alpha I < \varepsilon$ el benefici és negatiu perquè la inversió no és suficientment efectiva com per a permetre la reducció del preu.
- Cas 2: $\alpha I > \varepsilon$. Cas 2a: $(\alpha I - \varepsilon)q < I$. El benefici $\pi_1 = (\alpha I - \varepsilon)q - I$ seria negatiu. A diferència del cas 1, la inversió és efectiva per a reduir el preu, però fer-se amb tot el mercat no compensa el cost total.
- Cas 2b: $(\alpha I - \varepsilon)q > I$. Això vol dir que $\pi > 0$; això és, $I(\alpha q - 1) - \varepsilon q > 0$ i, en conseqüència, $\alpha q - 1 > 0$. Per tant, la constant $\alpha q - 1$ que acompanya la inversió és positiva i el benefici creix amb la inversió. Maximitzar el benefici porta a invertir el valor màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$.
- En resum, per la simetria entre duopolistes, en el cas 1 i en el cas 2a res no canvia en el mercat: no hi ha inversió, el preu és $p = c_0$ i els dos duopolistes tenen benefici zero. En canvi, en el cas 2b el duopolista 1 reduïx el preu a $p' = c_0 - \varepsilon$, captura tota la demanda i obté un benefici positiu

$$\pi_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}(\alpha q - 1) - \varepsilon q = (c_0 - c_1 - \varepsilon)q - \frac{c_0 - c_1}{\alpha}.$$

- L'altre duopolista (duopolista 2) no ven res en $t = 1$ i té pèrdues. En $t = 2$, el duopolista 2 decideix si inverteix o es retira del mercat (si no inverteix i iguala, o reduïx, el seu preu per sota del preu $c_0 - \varepsilon$ del duopolista 1 continuaria amb pèrdues).
- Si inverteix ha de reduir el preu a $c_0 - 2\varepsilon$. En aquest cas la funció de benefici del duopolista 2 seria

$$\pi_2 = ((c_0 - 2\varepsilon) - c_0 + \alpha I)q - I = (\alpha I - 2\varepsilon)q - I = I(\alpha q - 1) - 2\varepsilon q.$$

- L'anàlisi és anàloga a la del duopolista 1 en $t = 1$.
- Cas 1': $\alpha I < 2\varepsilon$. El benefici $\pi_2 = (\alpha I - 2\varepsilon)q - I$ seria negatiu, ja que la inversió no és suficientment efectiva com per a permetre la rebaixa del preu.
- Cas 2': $\alpha I > 2\varepsilon$. Cas 2a': $(\alpha I - 2\varepsilon)q < I$. El benefici $\pi_2 = (\alpha I - 2\varepsilon)q - I$ seria negatiu. La inversió és efectiva per a reduir el preu però no per a incrementar el benefici.
- Cas 2b': $(\alpha I - 2\varepsilon)q > I$. Com al cas 2b, maximitzar el benefici requereix invertir el valor màxim $I_1 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}$.
- Conclusió: en el cas 1' i en el cas 2a' el duopolista 1 es fa definitivament amb el mercat i el duopolista 2 és expulsat, en tant que en el cas 2b' el duopolista 2 es queda temporalment amb el mercat i el duopolista 1 té pèrdues. El benefici del duopolista 2 en $t = 2$ seria inferior al del duopolista 1 en $t = 1$:

$$\pi_2 = \frac{c_0 - c_1}{\alpha}(\alpha q - 1) - 2\varepsilon q = (c_0 - c_1 - 2\varepsilon)q - \frac{c_0 - c_1}{\alpha} = \pi_1 - \varepsilon q.$$

- La diferència de benefici εq deriva de la pèrdua d'ingrés deguda a la rebaixa en ε unitats del preu del duopolista 1 en $t = 1$.
- De l'anterior es pot inferir el següent patró: en cada període s'expulsa definitivament un dels duopolistes o el duopolista expulsat temporalment en el període anterior torna rebaixant el preu ε unitats. Atès que ε és un valor finit, el procés d'expulsió temporal i possible retorn acaba amb un dels dos següents resultats:
 - només queda en el mercat un duopolista amb un benefici positiu; o
 - tots dos duopolistes són al mercat amb benefici zero (i preu $p' = c_1$).
- Aquest resultat identifica un dilema per a la política industrial: si es vol preservar la competència (que hi hagi dos productors), no s'hauria d'incentivar la innovació (que fa molt probable que un dels productors desaparegui); i si es vol estimular la innovació, es corre el risc d'eliminar la competència i transformar el duopoli en monopoli.

8. Competicions i innovació en el duopoli de Cournot

- El model desenvolupat a continuació afegeix al duopoli de Cournot (amb productors idèntics i funció de cost (1)) una política que fa participar els duopolistes en una competició: qui inverteixi menys paga la inversió de qui inverteixi més (si tots dos inverteixen el mateix, cadascú es paga la inversió pròpia).
- Com que no és gens habitual que empreses es facin pagaments forçosos entre elles, es podria interpretar que la política consisteix en les següents mesures:
 - el duopolista que inverteixi menys ha de pagar un impost al govern;
 - el govern paga una subvenció al duopolista que més inverteixi;

- un cop conegudes les inversions dels duopolistes, el govern decreta que l'impost a pagar coincideix amb la inversió del duopolista que més ha invertit i que l'import de la subvenció és igual a la recaptació per l'impost.

- Cada duopolista tria primer la inversió i, a continuació, la producció. Aplicant la tècnica de la inducció cap enrere, cada duopolista determina primer la producció (en funció de la inversió) i després selecciona el nivell d'inversió.
- La funció de demanda és

$$p = a - b(q + q')$$

on q és la producció del duopolista 1 i q' la del duopolista 2.

- La funció de benefici del duopolista 1 és

$$\pi = (p - c_0 + \alpha I)q - I = (a - c_0 + \alpha I - bq - bq')q - I.$$

- La maximització de la funció de benefici demana

$$0 = \frac{d\pi}{dq} = a - c_0 + \alpha I - bq' - 2bq$$

o

$$q = \frac{a - c_0 + \alpha I - bq'}{2b}.$$

- Per la simetria dels duopolistes,

$$q' = \frac{a - c_0 + \alpha I' - bq}{2b},$$

on I' és la inversió del duopolista 2.

- Combinat les dues darreres equacions,

$$q = \frac{a - c_0 + \alpha(2I - I')}{3b}$$

$$q' = \frac{a - c_0 + \alpha(2I' - I)}{3b}.$$

- El preu és

$$p = \frac{a + 2c_0 - \alpha(I + I')}{3}.$$

- La funció de benefici del duopolista 1 si paga la seva inversió és

$$\pi = \pi_0 - \frac{2\alpha(a - c_0)(I + I')}{9b} - \frac{\alpha^2(4I + I')(2I - I')}{9b} - I$$

i si no la paga

$$\hat{\pi} = \pi_0 - \frac{2\alpha(a - c_0)(I + I')}{9b} - \frac{\alpha^2(4I + I')(2I - I')}{9b}$$

on $\pi_0 = \frac{(a - c_0)^2}{9b}$ és el benefici si la inversió de cada duopolista és zero.

- Cas 1: el rival no inverteix. Prenent la perspectiva del duopolista 1, sigui $I' = 0$. Si 1 no inverteix, s'obté la solució convencional del duopoli de Cournot, amb $\pi = \pi' = \pi_0 = \frac{(a-c_0)^2}{9b}$. Si 1 inverteix, la seva funció de beneficis esdevé

$$\pi = \pi_0 - \frac{2\alpha(a-c_0)I}{9b} - \frac{8\alpha^2 I^2}{9b}$$

que, atès que $a > c_0$, es maximitza amb $I = 0$. Conclusió: si un duopolista no inverteix, el millor per l'altre duopolista és no invertir (tot i que pagui la inversió el duopolista no inversor).

- Cas 2: el rival inverteix. Prenent la perspectiva del duopolista 1, sigui $I' > 0$.
- Cas 2a: 1 inverteix el mateix que 2 ($I = I'$). Com que cada duopolista es paga la seva inversió, la funció de beneficis del duopolista 1 és

$$\pi = \pi_0 - \frac{4\alpha(a-c_0)I}{9b} - \frac{5\alpha^2 I^2}{9b} - I$$

que, atès que $a > c_0$, es maximitza amb $I = 0$. Resultat: no hi ha equilibri on els dos duopolistes inverteixen i inverteixen el mateix.

- Cas 2b: 1 inverteix menys que 2 ($I < I'$). Ara el duopolista 1 ha de pagar tota la inversió (la seva i la de l'altre duopolista). La funció de beneficis del duopolista 1 és

$$\pi = \pi_0 - \left(\frac{2\alpha(a-c_0)(I+I')}{9b} + \frac{\alpha^2(4I+I')(2I-I')}{9b} + I + I' \right)$$

Si $2I - I' > 0$, aleshores la suma entre parèntesis és positiva; això implica $\pi < \pi_0$, de manera que el millor per al duopolista 1 és no invertir. Si $2I - I' < 0$, la derivada respecte d' I de la funció de benefici

$$\pi = \pi_0 - \frac{2\alpha(a-c_0)I'}{9b} - I' + \frac{\alpha^2 I'^2}{9b} - \left(\frac{2\alpha(a-c_0)I}{9b} + \frac{2\alpha^2 I(4I-I')}{9b} + I \right)$$

seria

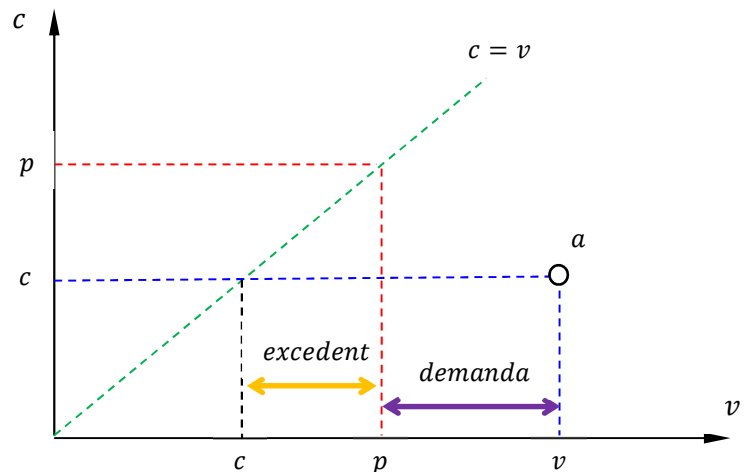
$$\frac{d\pi}{dI} = \frac{2\alpha(a-c_0)}{9b} + \frac{2\alpha^2(8I-I')}{9b} + 1 = \frac{2\alpha(a-c_0-\alpha I')}{9b} + \frac{16\alpha^2}{9b} + 1.$$

Per construcció del model, $a - c_0 - \alpha I' > 0$. Això implica que $\frac{d\pi}{dI} > 0$: el benefici del duopolista 1 creix amb la seva inversió. Atès que, en aquest cas, $I < I'$ encara hi ha marge per a pujar I . De l'anterior se segueix que $I < I'$ no maximitza el benefici del duopolista 1.

- Cas 2c: 1 inverteix més que 2 ($I > I'$). En aquest cas el duopolista 2 es troba en la mateixa situació que el duopolista 1 en el cas 2b. Atès que la decisió sobre inversió del duopolista 1 no maximitzava benefici, la decisió ara del duopolista 2 tampoc no ho fa.
- En resum: no hi ha equilibri on algun duopolista inverteix i, per consegüent, en l'únic equilibri cap duopolista no inverteix (la política empra un mecanisme de competició que no funciona).

9. Innovació com a instrument d'expansió de mercat i de creació de valor

- Hi ha únic productor d'un producte.
- Cada consumidor decideix si compra una unitat del producte o no en compra cap.
- Cada consumidor atribueix un valor diferent al producte. Si el preu del producte és inferior (o igual) a aquest valor, el consumidor el compra. Si és superior, no el compra.
- En la representació gràfica del model (gràfica a la dreta) els consumidors s'ordenen en l'eix horitzontal, de menys a més valor v atribuït al producte. El cost c de produir el producte es mesura en l'eix vertical.
- L'estat del mercat (punt a de la gràfica) es representa mitjançant un vector (c, v) : el cost c per al productor de produir cada unitat de producte i el valor v més gran d'algun consumidor en el mercat (el preu més alt que algú pagaria pel producte).



- Inicialment, el productor tria el preu p que maximitza la funció de benefici

$$\pi = (p - c)(v - p)$$

on $p - c$ és el benefici que s'obté per unitat venuda (excedent unitari) i $v - p$ defineix la demanda del producte (tots els consumidors que assignen al producte un valor entre el preu p i el valor més alt v que marca el límit superior del mercat).

- La condició de primer ordre és

$$0 = \frac{d\pi}{dp} = \frac{d(p - c)}{dp}(v - p) + (p - c)\frac{d(v - p)}{dp} = v - p - (p - c) = v + c - 2p$$

o

$$p = \frac{v + c}{2}.$$

- El benefici resultant és

$$\pi = (p - c)(v - p) = \left(\frac{v + c}{2} - c\right)\left(v - \frac{v + c}{2}\right) = \frac{(v - c)^2}{4}.$$

- Aquest model bàsic s'amplia amb la possibilitat que el productor faci despesa en innovació. La despesa en innovació afegeix més valor al producte (i, per tant, apuja el seu cost) i, simultàniament, amplia el mercat (s'incrementa el volum de consumidors potencials). Una interpretació és que la despesa en innovació crea noves varietats del producte original, les atreuen nous consumidors (disposats a pagar més per les noves varietats). El model, segons aquesta interpretació, explicaria la perfil·lació de variants, marques i models de productes.

- L'ampliació del model és simple. Hi ha una funció

$$c' = c(1 + \alpha I)$$

que estableix com la despesa en innovació I afecta el cost de produir: el nou cost c' és el cost antic c més l'efecte αI de la innovació sobre el cost, on $\alpha > 0$ és un paràmetre que mesura l'impacte de la innovació en el cost. Reordenant,

$$\frac{c'}{c} - 1 = \alpha I$$

o

$$\frac{c' - c}{c} = \alpha I.$$

El quocient $\frac{c' - c}{c}$ és el canvi relatiu del cost (en tant per u). Així, la hipòtesi $c' = c(1 + \alpha I)$ diu que la despesa en innovació genera un canvi percentual en el cost per mitjà del paràmetre α . Per exemple, $\alpha = 1/2$ indica que cada unitat de despesa incrementa el cost de producció d'un 50% (si $c = 4$ i $I = 1$ aleshores $c' = c(1 + \alpha I) = 4\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$: en passar de 4 a 6 el cost s'ha apujat d'un 50%).

- Hi ha una segona funció

$$v' = v(1 + \beta I)$$

que estableix com la despesa en innovació I afecta el valor del producte pels consumidors: el nou valor màxim v' és el valor antic v més l'efecte βI de la innovació sobre el valor, on $\beta > 0$ és un paràmetre que mesura l'impacte de la innovació en el valor que els consumidors atribueixen al producte (o la seva nova variant). Reordenant,

$$\frac{v'}{v} - 1 = \beta I$$

o

$$\frac{v' - v}{v} = \beta I.$$

El quocient $\frac{v' - v}{v}$ és el canvi relatiu del valor màxim del producte en el mercat (en tant per u). D'aquí que la hipòtesi que $v' = v(1 + \beta I)$ voldria que la despesa en innovació genera un canvi percentual en el valor màxim en el mercat per mitjà del paràmetre β . Per exemple, $\beta = 2$ indica que cada unitat de despesa incrementa el valor màxim en el mercat d'un 200% (si $v = 4$ i $I = 1$ aleshores $v' = v(1 + \beta I) = 4(1 + 2) = 12$: en passar de 4 a 12 el valor ha crescut un 200%).

- Cal afegir-hi una condició de consistència del model:

$$v' \geq c'.$$

Aquesta desigualtat és condició necessària per a l'existència de mercat: que el consumidor que més està disposat a pagar estigui disposat a pagar el cost del producte. Així doncs cal que

$$v(1 + \beta I) \geq c(1 + \alpha I)$$

o

$$v - c \geq I(c\alpha - v\beta).$$

- La desigualtat es compleix per a tot $I \geq 0$ si $c\alpha \leq v\beta$. Si $c\alpha > v\beta$, que equival a

$$\frac{c}{v} > \frac{\beta}{\alpha},$$

aleshores cal que

$$I \leq \frac{v - c}{c\alpha - v\beta}.$$

- Finalment, per a garantir solucions finites, hi ha un valor màxim $\bar{v}$ que es pot assolir amb la innovació. El paràmetre $\bar{v}$ representaria la màxima expansió del mercat del producte que la innovació faria possible i, per la condició anterior, per a tot I , $\bar{v} \geq c' = c(1 + \alpha I)$.
- Associat amb $\bar{v}$ hi ha el màxim valor $\bar{I}$ de la despesa en innovació. Aquest valor s'obté de la funció $v' = v(1 + \beta I)$ fent-hi $v = \bar{v}$, i pren el valor (presumint que $\bar{v} \geq c' = c(1 + \alpha \bar{I})$)

$$\bar{I} = \frac{\bar{v} - v}{v\beta}.$$

- El productor tria primer la despesa I i després el preu p per a maximitzar la nova funció de benefici

$$\pi' = (p' - c')(v' - p') - I$$

$$\pi' = (p' - c - c\alpha I)(v + v\beta I - p') - I.$$

- La condició de primer ordre és

$$0 = \frac{d\pi'}{dp'} = v' - p' - (p' - c') = v' + c' - 2p'$$

o

$$p' = \frac{v' + c'}{2} = \frac{v(1 + \beta I) + c(1 + \alpha I)}{2} = \frac{v + c + I(c\alpha + v\beta)}{2}.$$

- El benefici resultant és

$$\begin{aligned} \pi' &= (p' - c')(v' - p') - I = \left(\frac{v' + c'}{2} - c'\right)\left(v' - \frac{v' + c'}{2}\right) - I = \frac{(v' - c')^2}{4} - I = \\ &= \frac{(v(1 + \beta I) - c(1 + \alpha I))^2}{4} - I = \frac{(v - c + I(v\beta - c\alpha))^2}{4} - I = \frac{(v - c)^2}{4} + \\ &\quad + \frac{2I(v - c)(v\beta - c\alpha) + I^2(v\beta - c\alpha)^2 - 4I}{4} = \\ &= \pi + I\left(\frac{(v - c)(v\beta - c\alpha) - 2}{2}\right) + I^2\left(\frac{v\beta - c\alpha}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

- Definint

$$A = \frac{(v - c)(v\beta - c\alpha) - 2}{2}$$

$$B = \left(\frac{v\beta - c\alpha}{2}\right)^2$$

la funció de benefici és

$$\pi' = \pi + AI + BI^2$$

on $\pi = \left(\frac{v-c}{2}\right)^2 > 0$ és el benefici sense despesa en innovació, $B > 0$ i el paràmetre A pot ser zero, positiu o negatiu.

- La funció de benefici té les següents propietats.
 - És una paràbola.
 - Té un únic mínim, que s'assoleix amb $I = -\frac{A}{2B}$.
 - El mínim es troba en el quadrant sud-oest ($\pi' < 0$ i $I < 0$) si $A > 0$ i $A^2 > 4B\pi$ (Fig. 1).
 - El mínim es troba en el quadrant nord-oest ($\pi' > 0$ i $I < 0$) si $A > 0$ i $A^2 < 4B\pi$ (Fig. 2).
 - El mínim es troba en el quadrant sud-est ($\pi' < 0$ i $I > 0$) si $A < 0$ i $A^2 > 4B\pi$ (Fig. 3).
 - El mínim es troba en el quadrant nord-est ($\pi' > 0$ i $I > 0$) si $A < 0$ i $A^2 < 4B\pi$ (Fig. 4).

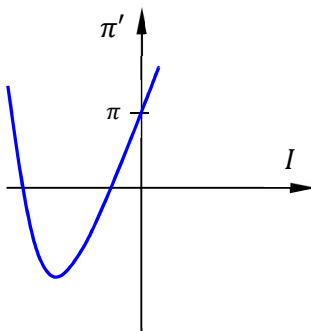


Fig. 1

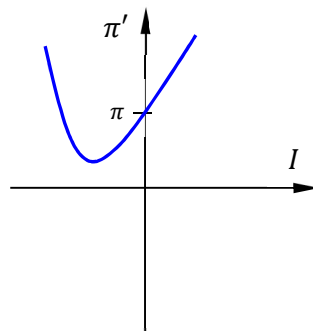


Fig. 2

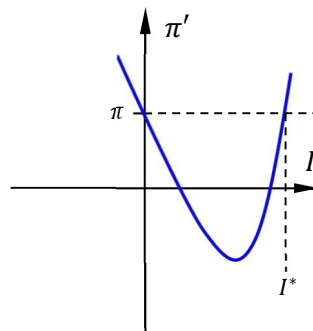


Fig. 3

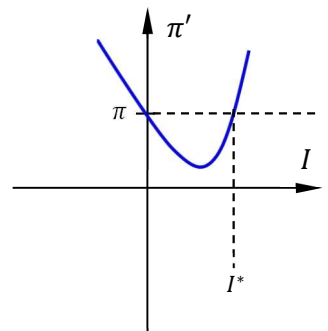


Fig. 4

- Sobre la base de les Figs. 1-4 es pot argumentar quina despesa en innovació maximitza el benefici, tot recordant que la part de la paràbola per a valors negatius d' I no és rellevant.
- Cas 1: $A < 0$ i $A^2 > 4B\pi$ (Fig. 1). En aquest cas, en el tram rellevant de la paràbola, el benefici creix amb la despesa en innovació. Per això, el valor màxim $\bar{I}$ admissible de la despesa en innovació és la despesa que maximitza el benefici.
- Cas 2: $A < 0$ i $A^2 < 4B\pi$ (Fig. 2). Com en el cas 1, en el tram rellevant de la paràbola el benefici creix amb la despesa en innovació. Igual que en el cas 1, el valor màxim $\bar{I}$ és la despesa que maximitza el benefici. Exemple (classe de 03/12/24): $v = 5$, $c = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ i $\bar{v} = 45$; amb aquestes dades, $A = 6$, $\pi = 1$, $4B = 49$, el mínim s'assoleix amb $I = -\frac{A}{2B} = -\frac{12}{49}$ i la solució és $\bar{I} = 4$ (amb $v' = \bar{v} = 45$, $c' = 15$ i benefici $\pi' = 221 > \pi$).

- Cas 3: $A > 0$ i $A^2 > 4B\pi$ (Fig. 3). La solució depèn d'on se situa $\bar{I}$. Si cau a la dreta del valor I^* , la solució és $\bar{I}$ (perquè és un valor factible); si cau a l'esquerra del valor I^* , la solució és $I = 0$ (atès que qualsevol altre despesa factible no proporciona un benefici superior).
- Cas 4: $A > 0$ i $A^2 < 4B\pi$ (Fig. 4). Igual que en el cas 3, la solució depèn d'on se situa $\bar{I}$. Si es troba a la dreta del valor I^* , la solució és $\bar{I}$; si es troba a l'esquerra d' I^* , la solució és $I = 0$.
- Se segueix dels anteriors resultats que, d'entrada, no hi ha gaire marge per a una política que pretengui estimular la innovació, ja que quan hi ha innovació és la màxima possible. El marge per a política seria incentivar la innovació quan el productor no innovaria. La innovació no es produeix en els casos de les Figs. 3 i 4 quan $\bar{I} < I^*$.
- La Fig. 5 il·lustra l'efecte d'una política simple que pretén estimular la innovació. La corba C representa la funció de benefici del productor i $\bar{I}$ indica la despesa màxima possible. En aquest cas, la despesa I que maximitza el benefici és zero: en l'interval $[0, \bar{I}]$, la funció C assoleix el màxim en el punt b . Una política que subvencionés la despesa en innovació (per exemple, si el govern paga una proporció de la despesa en inversió) transformaria la corba C en la corba D . Si el desplaçament cap amunt de C és suficient, el productor podria maximitzar el benefici fent la despesa $\bar{I}$: a la Fig. 5 el benefici un cop aplicada la política s'assoleix en el punt a .

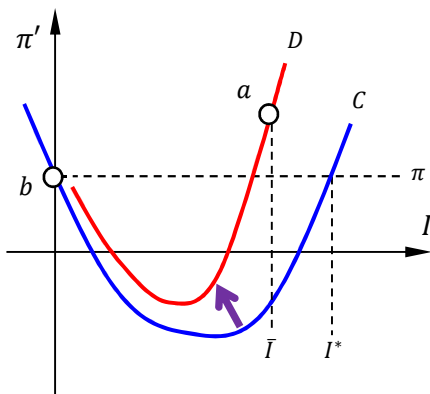


Fig. 5

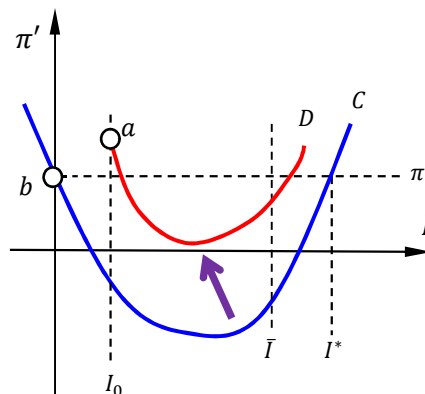


Fig. 6

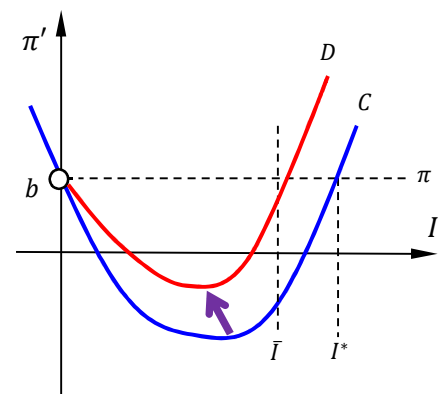


Fig. 7

- A la Fig. 5 la situació inicial és que el productor no fa despesa en innovació (punt b). La Fig. 6 mostra que no és cert que tota política que incentivi el productor a fer despesa portarà el productor a fer la màxima despesa $\bar{I}$. La política representada a la Fig. 6 assigna una subvenció al productor només a partir d'un cert nivell de despesa en innovació $I_0 < \bar{I}$. La funció no altera la funció de benefici entre 0 i I_0 , i la trasllada fins a D a partir d' I_0 . Segons aquesta representació, el màxim benefici s'assoleix amb despesa I_0 , en el punt a .
- La Fig. 7 mostra que no tota política és efectiva, en el sentit d'induir el productor a fer despesa en innovació quan, sense la política, el productor ha decidit no fer cap despesa. A la Fig. 7, la subvenció desplaça la funció de benefici de C a D . La maximització de benefici sobre la corba D es produeix amb $I = 0$.
- Finalment, no tota política industrial va adreçada al productor: la política industrial podria, alternativament o complementària, subvencionar els consumidors.

- En el model un increment de v' podria representar una subvenció als consumidors (per a què estiguin disposats a comprar noves varietats del producte: per exemple, comprar cotxes amb motor elèctric en comptes de cotxes amb motor de combustió). Aquesta representació significaria que el govern finança la incorporació de nous consumidors, no als consumidors que ja hi són al mercat.
- Si el govern, mitjançant una subvenció, amplia la mida del mercat de v' a $v' + s$, la funció de benefici seria

$$\pi' = (p' - c')(v' + s - p') - I.$$

- Aquesta mesura té un cost, d'entrada, indeterminat. Per exemple, tenir $s = 2$ i que el productor faci una despesa tal que $v' = 10$ significa que el govern pagaria la compra del producte dels consumidors compresos entre els valors 10 i 12 (entre v' i $v' + s$); en canvi, si la despesa del productor fa que $v' = 6$ el valor $s = 2$ voldria dir que el govern pagaria la compra dels consumidors representats pels valors entre 6 i 8.
- Una variant d'aquesta política és que el govern finança la incorporació de consumidors fins a un cert valor v^* . Si la despesa del productor porta a un valor $v' > v^*$ la política seria innecessària. Però si, amb la despesa en innovació, el productor només estén el mercat fins a $v' < v^*$, llavors el govern finança el consumidors entre v' i v^* . L'import esmerçat en la política continuaria sent indeterminat, però ara tindria un topall: el govern no finança compres de consumidors més enllà de v^* . Es deixa com a exercici representar i analitzar l'efecte d'aquesta política.
- Es podria combinar la subvenció al productor i als consumidors. Per exemple, si el govern deixa estendre s unitats el mercat i pagar tota la despesa en innovació del productor, la seva funció de benefici seria

$$\pi' = (p' - c')(v' + s - p').$$

- Una altra possibilitat: el govern finança els consumidors amb un impost de quantia equivalent sobre el productor. Aquesta política transformaria la funció de benefici en

$$\pi' = (p' - c')(v' + s - p') - I - s.$$

- Una possibilitat final: el govern finança els consumidors amb un impost de quantia equivalent sobre el productor, i compensa el productor assumint tota la seva despesa en innovació. Aquesta combinació de mesures fa que la funció de benefici sigui

$$\pi' = (p' - c')(v' + s - p') - s.$$

- Es deixa com a exercici estudiar si, i com, cada política proposada modifica la decisió d'innovar del productor.