

# 1. El mecanisme de Varian

## 1. El problema

---

- Hi ha dues empreses, E1 i E2.
- E1 produeix i ven un producte en un mercat competitiu. El preu del producte és  $p > 0$ .
- La producció d'E1 genera dos tipus de costos. Hi ha els costos interns, que assumeix E1. Hi ha a més uns costos externs (pol·lució o contaminació per nitrats, per exemple), que no assumeix E1 i que recauen sobre E2.
- La funció de costos interns  $c(x)$  estableix el cost monetari que E1 ha de pagar quan es produeix la quantitat  $x$  de producte. La funció  $c$  és positiva ( $c(x) > 0$ ), creixent ( $c'(x) > 0$ ) i convexa ( $c''(x) > 0$ ). Per tant, produir el bé és costós per a l'empresa, com més es produeix més gran el cost, i com més es produeix més s'incrementa el cost de produir.
- La funció de costos externs  $e(x)$  mesura en diner la pèrdua que la producció que fa E1 causa en E2. Quan E1 produeix la quantitat  $x$ , E1 s'estalvia el cost  $e(x)$ ; aquest cost recau E2. La funció  $e$  és positiva ( $e(x) > 0$ ), creixent ( $e'(x) > 0$ ) i convexa ( $e''(x) > 0$ ). Això és, que E1 produeixi el producte causa un perjudici a E2, com més es produeix més gran és el perjudici, i com més es produeix més s'incrementa el perjudici.
- En una interpretació més general, E1 pot representar tot un sector econòmic (el sector industrial) i E2 representaria la resta de l'economia. En aquesta interpretació,  $x$  mesura la producció del sector,  $c(x)$  la part dels costos de producció que assumeix el sector i  $e(x)$  la part dels costos que el sector trasllada a la resta de l'economia.
- La situació en que es troben E1 i E2 és problemàtica perquè E1 no té interès a assumir els costos que E1 crea i que pot traslladar lliurement a E2 i, simètricament, E2 no pot forçar E1 a internalitzar tots els costos que l'activitat productiva d'E1 genera.

## 2. Resultat descentralitzat i resultat Paretoeficient

---

En el resultat descentralitzat E1 maximitza la seva funció de beneficis

$$\pi_1 = p \cdot x - c(x)$$

sense tenir en compte els costos externs  $c(x)$ .

La condició necessària (que per les propietats de la funció  $c(x)$  també és suficient) per a maximitzar la funció és

$$0 = \frac{d\pi_1}{dx} = p - \frac{dc}{dx} = p - c'.$$

Sigui  $\bar{x}$  el valor d' $x$  que satisfà

$$p = c'(\bar{x}).$$

En el resultat Paretoeficient es maximitza la funció total de beneficis (ja que s'assumeix que només E2 es veu afectat per l'externalitat d' E1)

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = p \cdot x - c(x) - e(x).$$

Ara cal que

$$0 = \frac{d\pi}{dx} = p - \frac{dc}{dx} - \frac{de}{dx} = p - c' - e'.$$

Sigui  $x^*$  el valor d' $x$  que satisfà

$$p = c'(x^*) + e'(x^*).$$

Com a resultat,

$$c'(x^*) + e'(x^*) = c'(\bar{x}).$$

Per hipòtesi,  $c'$  és creixent (ja que  $c'' > 0$ ). També per hipòtesi,  $e' > 0$  (ja que  $e > 0$  i  $e$  és convexa). Per consegüent,

$$c'(\bar{x}) + e'(x^*) > c'(\bar{x})$$

de manera que per a tenir-se

$$c'(x^*) + e'(x^*) = c'(\bar{x})$$

cal que

$$c'(x^*) < c'(\bar{x})$$

que requereix

$$x^* < \bar{x}$$

ja que  $c'$  és creixent.

Segons aquesta desigualtat, la solució descentralitzada  $\bar{x}$  implica produir més que la solució Paretoeficient  $x^*$ . Aquest és el problema causat per l'existència d'efectes externs: comporta un excés de producció en relació amb la situació on els efectes externs s'han internalitzat.

### 3. Possibles solucions al problema dels efectes externs

- El '**teorema**' de Coase (Ronald H. Coase, 1960). Aquest resultat és la conjectura que es pot assolir un resultat Paretoeficient en un determinat problema estratègic
  - mitjançant la negociació de les parts involucrades en el problema,
  - sense intervenció directa del sector públic,

- si no hi ha costos de transacció i negociació, i
- si els drets de propietat sobre els béns involucrats en el problema estan ben definits i assignats.

Aquesta conjectura és aplicable al problema d'internalitzar externalitats, però la seva rellevància pràctica està limitada per la manca d'identificació d'un mecanisme concret que permeti assolir el resultat Paretoeficient.

Coase, Ronald Harry (1960): "The problem of social cost", *Journal of Law Economics* 3, 1–44.

- **Externalitats com a mercats inexistents** (Kenneth J. Arrow, 1969). En aquesta aproximació al problema de les externalitats s'interpreta que una externalitat és la manifestació de l'absència d'un mercat. En conseqüència, la solució passa per crear un mercat on es compri i vengui l'externalitat (o el dret a crear-la). Per exemple, existeixen 'mercats del carboni' on es compra el dret a emetre CO<sub>2</sub>; vegeu [https://climate.ec.europa.eu/eu-action/eu-emissions-trading-system-eu-ets\\_en?prefLang=es](https://climate.ec.europa.eu/eu-action/eu-emissions-trading-system-eu-ets_en?prefLang=es) i [https://climate.ec.europa.eu/eu-action/eu-emissions-trading-system-eu-ets/international-carbon-market\\_en?prefLang=es](https://climate.ec.europa.eu/eu-action/eu-emissions-trading-system-eu-ets/international-carbon-market_en?prefLang=es).

Arrow, Kenneth Joseph (1969): "The organization of economic activity: Issues pertinent to the choice of market versus non market allocation", in: Congress of the United States, *The Analysis and Evaluation of Public Expenditures: The PPB System*, 47–64.

- **Impost Pigouvià** (Arthur C. Pigou, 1920). Aquest mecanisme es basa en la creació d'un impost equivalent al perjudici que causa una externalitat i que ha de pagar qui la causa. L'impost és un instrument per a internalitzar l'externalitat i igualar la solució descentralitzada amb la Paretoeficient.

Pigou, Arthur Cecil (1920): *The economics of welfare*, Macmillan.

- **El mecanisme de compensació de Varian** (Hal R. Varian, 1994). Aquesta proposta per a assolir el resultat Paretoeficient es fonamenta en la construcció d'un joc on participen creador i afectats per una externalitat de manera que la solució del joc generi el resultat Paretoeficient.

Varian, Hal Ronald (1994): "A solution to the problem of externalities when agents are well-informed", *American Economic Review* 84(5), 1278–1293.

#### 4. El mecanisme de compensació de Varian

---

El mecanisme construeix un joc en dues etapes. En aquest joc participen E1 i E2 com a jugadors. La primera etapa especifica estratègies dels jugadors (afegides a les que ja tenien). La segona etapa concreta els pagaments que obtenen els jugadors en el joc.

- Etapa 1: revelació de valors. En l'etapa 1 les empreses han de declarar valors. Específicament, E1 ha d'anunciar un valor positiu  $\tau_1$  (el que vulgui) i E2 ha d'anunciar un valor positiu  $\tau_2$  (el que vulgui). Una interpretació és que aquests valors són les propostes de cada empresa sobre

l'impost que per unitat produïda caldria que pagués E1 (i, simultàniament, la transferència monetària que per unitat produïda per E1 hauria de rebre E2 en compensació pel mal causat per l'externalitat que crea E1).

- Etapa 2: recàlcul de pagaments. En l'etapa 1 les empreses han de declarar valors. Específicament, E1 ha d'anunciar un valor positiu  $\tau_1$  (el que vulgui) i E2 ha d'anunciar un valor positiu  $\tau_2$  (el que vulgui). Una interpretació és que aquests valors són les propostes de cada empresa sobre l'impost que per unitat produïda caldria que pagués E1 (i, simultàniament, la transferència monetària que per unitat produïda per E1 hauria de rebre E2 en compensació pel mal causat per l'externalitat que crea E1).

El pagament del mecanisme per E1 és, on  $\alpha > 0$  és un valor constant arbitrari i  $x^m$  és la quantitat de producte que E1 decideix produir,

$$\pi_1^m = p \cdot x^m - c(x^m) - \tau_2 \cdot x^m - \alpha(\tau_1 - \tau_2)^2$$

on s'introdueixen dos termes en la funció de beneficis prèvia al mecanisme.

- El primer terme  $-\tau_2 \cdot x^m$  indica que l'empresa E1 ha de pagar, per cada unitat produïda, el valor  $\tau_2$  que declara E2 en l'etapa 1.
- El segon terme  $-\alpha(\tau_1 - \tau_2)^2$  representa una penalització a E1 per declarar un valor diferent al declarat per E2 en l'etapa 1. Com més gran la discrepància, més gran la penalització ( $\alpha$  transforma la discrepància en penalització; pot assumir-se que  $\alpha = 1$ ).

El pagament del mecanisme per E2 és

$$\pi_2^m = \tau_1 \cdot x^m - e(x^m).$$

Aquesta funció incorpora el terme  $\tau_1 \cdot x^m$  a la funció de beneficis original d'E2. El terme seria el pagament que rep E2 com a compensació per l'externalitat causada per E1. El pagament depèn del valor  $\tau_1$  que declara E1 en l'etapa 1: per cada unitat produïda per E1, E2 rep l'import monetari  $\tau_1$ .

## 5. La solució del mecanisme de Varian

---

El mecanisme construeix un joc en dues etapes. En aquest joc participen E1 i E2 com a jugadors. La primera etapa especifica estratègies dels jugadors (afegides a les que ja tenien). La segona etapa concreta els pagaments que obtenen els jugadors en el joc.

$$\pi_1 = p \cdot x - c(x)$$

$$\pi_2 = -e(x)$$

## 6. Un exemple

---

Sigui

$$p = 6$$

$$c(x) = 1 + x^2$$

$$e(x) = \frac{x^2}{2}.$$

La solució descentralitzada, sense el mecanisme, s'obté amb E1 maximitzant la funció de beneficis

$$\pi_1 = px - c(x) = 6x - (1 + x^2).$$

La condició necessària (que per les propietats de la funció  $c(x)$  també és suficient) per a maximitzar la funció és

$$0 = \frac{d\pi_1}{dx} = 6 - 2x$$

d'on es conclou que E1 produeix

$$x = 3$$

amb una cost extern

$$e(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Si només E2 es veu afectat per l'externalitat, la solució  $x^*$  que maximitza els beneficis conjunts (la solució Paretoeficient) s'obté maximitzant la suma

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = px - c(x) - e(x) = 6x - (1 + x^2) - \frac{x^2}{2} = -1 + 6x - \frac{3x^2}{2}.$$

Aquesta solució satisfà

$$0 = \frac{d\pi}{dx} = 6 - 3x$$

d'on es dedueix

$$x^* = 2$$

i

$$e(x^*) = \frac{x^{*2}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

La conclusió no sorprèn: atès que E1 no es fa càrrec de tot el cost de produir, en produeix més ( $x = 3$ ) del que es produiria ( $x = 2$ ) assumint-los.

Si s'aplica el mecanisme, en l'etapa 2, E1 ara ha de maximitzar la funció modificada de beneficis

$$\pi_1^m = px - c(x) - \tau_2 x - \alpha(\tau_1 - \tau_2)^2 = 6x - (1 + x^2) - \tau_2 x - \alpha(\tau_1 - \tau_2)^2$$

on  $\tau_1$  i  $\tau_2$  s'han determinat prèviament a l'etapa 1. Quan es maximitza respecte d' $x$ , s'ha de complir

$$0 = \frac{d\pi_1^m}{dx} = 6 - 2x - \tau_2$$

d'on s'obté la relació negativa entre el volum de producció  $x$  que maximitza la funció de beneficis d'E1 i la declaració de valor  $\tau_2$  que E2 fa en l'etapa 1:

que

$$x = 3 - \frac{\tau_2}{2}.$$

Aquesta equació expressa la funció de reacció d'E1 a la declaració d'E1: si E2 declara  $\tau_2$ , aleshores el millor per a E1 és produir  $x = 3 - \tau_2/2$ .

El mecanisme presumeix que E2 pot replicar aquesta relació entre  $x$  i  $\tau_2$ , i la fa servir, en l'etapa 1, per a maximitzar la seva funció de beneficis segons els mecanisme:

$$\pi_2^m = \tau_1 x - e(x) = \tau_1 x - \frac{x^2}{2} = \tau_1 \left(3 - \frac{\tau_2}{2}\right) - \frac{\left(3 - \frac{\tau_2}{2}\right)^2}{2}.$$

E2 pot triar  $\tau_2$ , de manera que maximitzar  $\pi_2^m$  respecte de  $\tau_2$  requereix

$$0 = \frac{d\pi_2^m}{d\tau_2} = -\frac{\tau_1}{2} - \frac{2\left(3 - \frac{\tau_2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{\tau_1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\tau_2}{4}$$

o

$$\tau_2 = 6 - 2\tau_1.$$

En la mesura que s'assumeix que E1 i E2 coneixen totes les funcions de beneficis del mecanisme, E2 sap que la millor declaració de valor  $\tau_1$  per a E1 és

$$\tau_1 = \tau_2$$

ja que amb  $\tau_1 = \tau_2$  es minimitza la pèrdua  $-\alpha(\tau_1 - \tau_2)^2$  en la funció  $\pi_1^m$  d'E1. Això fa que  $\tau_2 = 6 - 2\tau_1$  esdevingui

$$\tau_2 = 6 - 2\tau_2$$

i, d'aquí,

$$\tau_2 = 2,$$

que coincideix amb el valor  $e(x^*)$  que mesura el cost extern que recau sobre E2 quan E1 produeix tenint en compte el perjudici que la seva producció causa en E2.

Finalment,  $\tau_2 = 2$  i  $x = 3 - \frac{\tau_2}{2}$  impliquen

$$x^m = 2.$$

Per consegüent, el mecanisme incentiva E1 a produir  $x^m = 2$ , que és el volum de producció eficient (el volum de producció quan E1 internacionalitza tots els costos de produir).

## 7. Una variant del mecanisme de Varian

---

El mecanisme de Varian no requereix que el regulador (qui aplica el mecanisme) estigui informat de les característiques de les empreses: no necessita conèixer el preu  $p$  del producte, ni el volum de producció  $x$  d'E1, ni la funció de costos interns  $c(x)$  d'E1, ni la funció de costos externs  $e(x)$  que afecta E2. En canvi, el mecanisme demana que les parts involucrades en el mecanisme (E1 i E2) sí coneguin preus, producció i funcions de costos.

La informació que cal que conegui E1 no és problemàtica. Hi ha informació que ja coneix prèviament al mecanisme (preu  $p$  i funció  $c(x)$  de costos interns). I després hi ha la informació relativa a  $\tau_2$  que és subministrada per l'etapa 1 (els anuncis de  $\tau_1$  i  $\tau_2$  són públics per als participants en el mecanisme).

D'altra banda, el mecanisme exigeix que E2 disposi d'informació que en principi és pròpia o exclusiva d'E1. En concret, E2 necessita conèixer tot allò que li permeti reproduir la solució que troba E1, solució que relaciona la producció  $x$  i la declaració  $\tau_2$ . Més específicament, hauria de saber quina és la funció que pretén maximitzar E1 en el mecanisme:

$$\pi_1^m = px - c(x) - \tau_2 x - \alpha(\tau_1 - \tau_2)^2$$

Per tant, E2 ha de saber el preu, la funció de costos interns i l'efecte de  $\tau_2$  sobre els beneficis (a E2 no li caldria conèixer la penalització  $\alpha(\tau_1 - \tau_2)^2$ ). Amb aquesta informació E2 pot descobrir la funció  $x(\tau_2)$  que connecta la seva declaració  $\tau_2$  amb la decisió de quant produir d'E1. E2 necessita la funció  $x(\tau_2)$  per a concloure que el millor per a ell és declarar

$$\tau_2 = e'(x^m)$$

on  $x^m$  és el volum de producció que E1 tria en el mecanisme.

Es pot construir una variant del mecanisme de Varian on E2 necessita menys informació. En aquest nou mecanisme hi ha tres etapes.

- **Etapa 1.** Igual que en el mecanisme de Varian, E1 ha d'anunciar un valor positiu  $\tau_1$  i E2 ha d'anunciar un valor positiu  $\tau_2$ .
- **Etapa 2.** E1 ha d'informar E2 de la quantitat  $\bar{x} > 0$  de producte que ha decidit produir i el regulador informa E2 que E1 pagarà una penalització per produir una quantitat diferent a la declarada.
- **Etapa 3.** Igual que en el mecanisme de Varian, el regulador dicta el resultat del mecanisme en funció dels anuncis de l'etapa i del volum de producció que decideixi fer E1. Concretament, el regulador informa E1 que el seu pagament és

$$\pi_1^m = p \cdot x^m - c(x^m) - \tau_2 \cdot x^m - \alpha(\tau_1 - \tau_2)^2 - \beta(\bar{x} - x^m)^2$$

on  $\alpha$  i  $\beta$  són paràmetres positius arbitraris i  $x^m$  és la quantitat de producte que E1 efectivament produeix (s'entén que el volum de producció d'E1 és observable). Es podria permetre que E1 declarés  $\bar{x} = 0$  en l'etapa 2 si, en aquest cas,  $\pi_1^m$  prengué un valor arbitràriament negatiu.

El regulador també informa E1 i E2 que el pagament d'E2 és

$$\pi_2^m = -\left(\tau_2 + \ln \tau_2 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) \bar{x} - e\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \bar{x}\right).$$

Aquí la presumpció és que E1 i E2 coneixen la funció de costs externs: aquesta funció es pot considerar informació pública, perquè aquesta mena de costs han estat estimats mitjançant estudis, fets per agències públiques o per institucions acadèmiques o de recerca.

Es demostra a continuació que E2 declara el mateix valor  $\tau_2$  que en el mecanisme de Varian. De fet, E2 tria  $\tau_2$  que satisfà

$$0 = \frac{d\pi_2^m}{d\tau_2} = -\left(1 + \frac{1}{\tau_2} - \frac{\tau_1}{(\tau_2)^2}\right) \bar{x} - \frac{de}{d\tau_2}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \bar{x}\right) \left(-\frac{\tau_1 \bar{x}}{(\tau_2)^2}\right)$$

$$1 = -\frac{1}{\tau_2} + \frac{\tau_1}{(\tau_2)^2} + e'\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \bar{x}\right) \frac{\tau_1}{(\tau_2)^2}$$

$$\tau_2 = -1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} + e'\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \bar{x}\right) \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

i, pel fet que E1 decideix fer  $\tau_1 = \tau_2$ ,

$$\tau_2 = -1 + 1 + e'(\bar{x})$$

o

$$\tau_2 = e'(\bar{x}).$$

Es deixa com a exercici comprovar que E1 no té interès a declarar un valor  $\bar{x} \neq x^m$  i que  $x^m$  és el volum de producció Paretoeficient.