7. Modelo 1: Cuando el cobro de deudas es costoso

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de personas, G1 y G2 , cada uno con n miembros.

• Las personas viven dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0): una unidad de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2, 2): dos unidades de joven y dos de mayor.

• Todo prestamista decide la cantidad e (un valor entre 0 y 1) de bien dedicada a garantizar el cobro de la deuda: si la cantidad a cobrar es D y se invierte e, entonces se consigue cobrar $e \cdot D$.

2. Decisiones

• **Decisiones de los prestamistas.** El problema de todo prestamista es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sujeto a} & c_1 + l_1 + e_1 = 1 \\ & c_1' = e_1 \cdot R \cdot l_1 \end{array}$$

dónde e_1 es la parte de la dotación destinada (una medida del esfuerzo aplicado) a garantizar el retorno del préstamo. El efecto del esfuerzo o inversión e_1 en la restricción de mayor es equivalente a una reducción del tipo de interés.

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar } \; u_1 = (1 - l_1 - e_1)e_1 R l_1 \; \text{ respecto de } l_1 \text{ y } e_1.$$

Maximizar respecto de l_1 requiere

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = e_1 R(1 - 2l_1 - e_1).$$

Esto es,

$$l_1 = \frac{1 - e_1}{2}.$$

Maximizar respecto de e_1 requiere

$$0 = \frac{du_1}{de_1} = Rl_1(1 - l_1 - 2e_1).$$

Por consiguiente,

$$e_1 = \frac{1 - l_1}{2}.$$

Combinando $l_1 = \frac{1-e_1}{2}$ y $e_1 = \frac{1-l_1}{2}$ se llega a

$$\boxed{l_1 = e_1 = \frac{1}{3}.} \tag{1}$$

Por la restricción $c_1 + l_1 + e_1 = 1$ de joven

$$c_1 = \frac{1}{3}.$$

Por la restricción $c_1' = e_1 R l_1$ de mayor

$$c_1' = \frac{R}{9}.$$

• **Decisiones de los prestatarios.** Que los prestamistas tengan que hacer una inversión para obtener el retorno del préstamo hace que la parte del préstamo que devuelven los prestatarios dependa de la inversión que realicen los prestamistas. El enunciado no especifica qué parte del préstamo efectivamente devuelven los prestatarios. Por la simetría de la situación (n prestamistas idénticos se enfrentan a n prestatarios idénticos) es razonable asumir que el esfuerzo e (acotado por los valores 0 y 1) aplicado por cada prestamista conlleva que cada prestatario devuelva sólo la fracción e de la deuda. En resumen, cada prestatario pretende

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sujeto a} & c_2 + l_2 = 2 \\ & c_2' = 2 + e_1 \cdot R \cdot l_2 \end{array}$$

donde e_1 es, desde la perspectiva de los prestatarios, un valor determinado por los prestamistas. Por (1), $e_1 = 1/3$.

La solución:

$$\boxed{l_2 = 1 - \frac{3}{R}.} \tag{2}$$

3. Mercados

• **Equilibrio en el mercado de préstamos.** Empleando (1), (2) y la condición de equilibrio en el mercado de préstamos $n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$ se obtiene (para cada período diferente del primero)

$$R = \frac{9}{4}.$$

El consumo resultante para cada persona es

$$c_1 = \frac{1}{3}$$

$$c_1' = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{7}{3}$$

$$c_2' = \frac{7}{4}.$$

Cuando no era necesario realizar ningún esfuerzo para cobrar la deuda (la solución del Modelo 1 original, identificada con un asterisco)

$$c_1{}^* = \frac{1}{2} > c_1$$

$$c_1'^* = \frac{1}{3} > c_1'$$

$$c_2{}^* = \frac{5}{2} > c_2$$

$$c_2'^* = \frac{5}{3} < c_2'.$$

En términos de utilidad,

$$u_1 = \frac{1}{12} < u_1{}^* = \frac{1}{6}$$

$$u_1' = \frac{1}{4} < u_1'^* = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{49}{12} = 4 + \frac{1}{12} < u_2{}^* = \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$$

$$u_2' = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} > u_2'^* = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

En suma: <u>si los prestatarios son deshonestos</u> (pagan en función del esfuerzo que los prestamistas realizan para cobrar deudas), <u>todos pierden (respecto del caso en que son honestos) excepto los prestatarios cuando son mayores</u>.

• **Ejercicio 1.** ¿Y si los prestatarios fueran deshonestos pero los prestamistas ignoraran que lo son?

• **Ejercicio 2.** ¿Y si los prestatarios fueran realmente honestos (pagan toda su deuda sin necesidad de esfuerzo de los prestamistas) pero los prestamistas creen que no lo son y hacen un esfuerzo para garantizar el retorno del préstamo?

4. Los prestatarios quieren ser honestos

Supongamos que los prestatarios jóvenes son honestos: cuando obtienen un préstamo quieren devolverlo. El problema es que quien efectivamente tendrá que devolver los préstamos será él mismo pero en el futuro, de mayor. Y de mayor podría repensarse si ser honesto (y pagar la deuda) o deshonesto (y quedárselo para incrementar su consumo). Imaginemos que todo prestatario mayor no devuelve el préstamo.

A continuación se propone una forma de representar cómo un prestatario joven intentaría garantizar que él mismo de mayor pagará su deuda. Dado que los miembros jóvenes de G2 son los únicos posibles prestatarios, se supone que los jóvenes de G2 dedican una parte e_2 de su dotación para forzarse a devolver el préstamo de mayor. En concreto, si x es el volumen de deuda a pagar y se dedica la cantidad e_2, entonces el joven puede forzarse a pagar de mayor el volumen de deuda $e_2 \cdot x$. Para simplificar, se asume que $e_2 \leq 1$.

• **Decisiones de los prestatarios.** El problema de todo prestatario es

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ &\text{sujeto a} && c_2 + l_2 + e_2 = 2 \\ & && c_2' = 2 + e_2 \cdot R \cdot l_2 \end{aligned}$$

donde se entiende que $e_2 > 0$ porque todo prestatario joven es honesto. Si de joven no se fuera honesto, entonces (siendo deshonesto de mayor) la solución al problema anterior implicaría que $e_2 = 0$: el consumo de joven no comporta la reducción e_2 y, de mayor, el bien a devolver no devuelto incrementaría el consumo de mayor.

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar } u_2 = (2 - l_2 - e_2) \cdot (2 + e_2 R l_2) \text{ respecto de } l_2 \text{ y } e_2$$

o

$$\text{maximizar } u_2 = 4 + 2e_2 R l_2 - 2l_2 - e_2 R (l_2)^2 - 2e_2 - (e_2)^2 R l_2 \text{ respecto de } l_2 \text{ y } e_2 \,.$$

Maximizar respecto de l_2 requiere

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = 2e_2 R - 2 - 2e_2 R l_2 - (e_2)^2 R$$

o

$$2 = Re_2(2 - 2l_2 - e_2).$$

y, empleando la restricción de joven,

$$2 = Re_2(c_2 - l_2). \tag{3}$$

Maximizar respecto de e_2 requiere

$$0 = \frac{du_2}{de_2} = 2Rl_2 - R(l_2)^2 - 2 - 2e_2Rl_2$$

o

$$2 = Rl_2(2 - l_2 - 2e_2).$$

y, empleando la restricción de joven,

$$2 = Rl_2(c_2 - e_2). \tag{4}$$

Combinando (3) y (4),

$$e_2(c_2 - l_2) = l_2(c_2 - e_2)$$

o

$$e_2c_2 - e_2l_2 = l_2c_2 - e_2l_2$$

o

$$e_2c_2 = l_2c_2$$

o

$$e_2 = l_2.$$

De aquí ya se deduce una contradicción: l_2 debe ser negativo (se trata de prestatarios) pero e_2 no puede ser negativo (se trata de cantidad de bien empleada en garantizar el cobro de la deuda).

Hay otra forma de obtener una contradicción. Con $e_2 = l_2$ y $2 = Rl_2(2 - l_2 - 2e_2)$,

$$2 = Rl_2(2 - 3l_2)$$

o

$$3R(l_2)^2 - 2Rl_2 + 2 = 0$$

o

$$\boxed{l_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{6}{R}}\right).}$$

Dado que los jóvenes de G2 deben ser prestatarios para que haya mercado de préstamos (ya que los jóvenes de G1 necesariamente son prestamistas) es necesario que $l_2 < 0$. Así pues,

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6}{R}}\right).$$

Pero $1 - \frac{6}{R} < 1$, por lo que $\sqrt{1 - \frac{6}{R}} < 1$ y, en consecuencia, $1 - \sqrt{1 - \frac{6}{R}} > 0$. En resumen, $l_2 > 0$. Se sigue de este resultado que no hay mercado de préstamos: todos los jóvenes de ambos grupos quieren ser prestamistas (y sólo crean oferta de préstamos).

Todo lo anterior (dado que se emplean condiciones basadas en derivadas) implica que no existe solución interior al problema de maximización de los prestatarios. ¿Hay posibles soluciones de esquina (extremas)? Por hipótesis, $l_2 < 0$ y no puede ser solución el otro valor extremo, $l_2 = 2$ (ya que comportaría $e_2 = 0$). Por hipótesis, $e_2 > 0$ y no puede ser solución el otro valor extremo, $e_2 = 2$ (ya que conllevaría $l_2 > 0$).

La conclusión final es que, en esta economía, el mercado (competitivo) de préstamos no acepta que los prestatarios sean honestos. La honestidad destruye el mercado. Y emerge un dilema: un joven puede ser prestatario o puede ser honesto, pero no puede ser prestario y honesto a la vez.

5. Otra forma de que los prestatarios sean honestos

Puede considerarse que la forma de introducir en §4 la voluntad de ser honesto de los jóvenes prestatarios es inherentemente contradictoria con el objetivo de maximización que caracteriza a los participantes en el mercado de préstamos. Si es así, el resultado de contradicción entre mercado y honestidad no debería sorprender: la contradicción es explícita en las hipótesis de comportamiento de los individuos (quieren maximizar utilidad pero se añade un elemento, el valor positivo e_2, que imposibilita la maximización).

Se sugiere a continuación otra manera de introducir en el modelo el concepto de honestidad (en el sentido de que las deudas asumidas de jóvenes se pagan de mayores). La propuesta es incluir en la función de utilidad satisfacción por ser honesto. El elemento que proporciona esa satisfacción es el pago de la deuda. Una primera forma de incluir este factor es postular una función de utilidad como

$$u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (R \cdot |l_2| - x)$$

donde $|l_2| = -l_2$, x es el volumen de deuda impagada y $R|l_2|$representa la deuda a pagar (se toma el valor absoluto $|l_2|$ de l_2 porque $l_2 < 0$) . En esta formulación la utilidad de un joven de G2 crece con el volumen $R|l_2| - x$ de deuda pagada de mayor. Si se quiere algo más de generalidad (dado que consumir el bien y pagar una deuda del bien no necesariamente deben impactar la utilidad de manera equivalente):

$$u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (R \cdot |l_2| - x)^{\alpha}$$

donde $\alpha > 0$ mide el impacto diferencial en la utilidad del pago de una deuda y del consumo. Por ejemplo, $\alpha = 2$ significaría que pagar una unidad del bien (como satisfacción de una deuda) proporciona el doble de utilidad que consumir una unidad del bien (de joven o de mayor). Si $\alpha < 0$ entonces pagar deudas es un mal (se preferiría no pagarlas).

• **Decisiones de los prestatarios.** El problema de todo prestatario es ahora

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (-Rl_2 - x) \\
\text{sujeto a} & c_2 + l_2 = 2 \\
 & c_2' = 2 + R \cdot l_2 + x
\end{array}
$$

donde el prestatario elige el valor positivo $x \leq R \cdot |l_2| = -Rl_2$ (de mayor, Rl_2 debería representar una pérdida de dotación, ya que $l_2 < 0$, pero en realidad la pérdida es x unidades menos porque x es la parte no pagada de la deuda).

A diferencia del modelo en §4, se asume ahora que el valor de x elegido de joven vincula al mayor. Entonces, ¿por qué no asumir directamente que el valor de l_2 elegido de joven vincula al mayor (y no le deja más opción que pagar Rl_2)? Una justificación es que el valor de x surge de un proceso de reflexión del prestatario por el cual su personalidad se mantiene honesta, por lo que la conclusión sobre el valor de x a que se llega de joven no se cuestiona de mayor.

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo se trata de

$$\text{maximizar } \ u_2 = (2 - l_2) \cdot (2 + Rl_2 + x) \cdot (-Rl_2 - x) \text{ respecto de } l_2 \text{ y } x$$

o

$$\text{maximizar } \ u_2 = -(2 - l_2) \cdot (y^2 + 2y) \text{ respecto de } l_2 \text{ y } x$$

donde se ha definido $y = Rl_2 + x$.

Maximizar respecto de x requiere

$$0 = \frac{du_2}{dx} = -(2 - l_2) \cdot \left(2y\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx}\right)$$

o, ya que $\frac{dy}{dx} = 1$,

$$0 = -(2 - l_2) \cdot 2 \cdot (y + 1).$$

Una solución requiere $l_2 = 2$. Pero esta elección implica $c_2 = 0$ (y $u_2 = 0$, un valor que no puede ser máximo).

La otra solución pide $y = -1$; esto es, $Rl_2 + x = -1$ o, equivalentemente, $x = -Rl_2 + 1 = R|l_2| + 1$. Esta condición contradice la hipótesis de que $x \leq R|l_2|$ (no se puede dejar de pagar más del importe de la deuda).

Se sigue de lo anterior que, <u>si existe algún valor de x que maximiza la función de utilidad, este valor no pertenece al interior del intervalo de valores admisibles de x</u>. En resumen: $x = R|l_2|$ o $x = 0$.

En el primer caso, $u_2 = 0$. Por consiguiente, el candidato a maximizar u_2 es $x = 0$. Recapitulando, se trata de

$$\text{maximizar } \ u_2 = -(2 - l_2) \cdot (2 + Rl_2) \cdot Rl_2 \ \text{ respecto de } l_2 \text{ y } x.$$

Maximizar respecto de l_2 exige

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = -4R - 4R^2 l_2 + 4R l_2 + 3R^2 {l_2}^2$$

o

$$0 = -4 - 4R l_2 + 4 l_2 + 3R {l_2}^2$$

o

$$3R{l_2}^2 + 4(1-R)l_2 - 4 = 0\,.$$

La solución:

$$\boxed{l_2 = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{R}\right) \pm \sqrt{1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}\right).}$$

En la medida en que $\sqrt{1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}} > 1-\frac{1}{R}$ y que es necesario $l_2 < 0$ (ya que debe ser la solución de un prestatario),

$$l_2 = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{R}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}\right).$$

• **Equilibrio de mercado.** Supongamos que los prestamistas no tienen dudas sobre el pago de la deuda, por lo que

$$l_1 = \frac{1}{2}.$$

En equilibrio, $l_1 + l_2 = 0$. Esto es,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{R}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}\right) = 0$$

o

$$\frac{21^2}{12^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{21}{6}\frac{1}{R} = 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}$$

o

$$\boxed{R = \frac{24}{11}.}$$

Supongamos que un joven de G2 tiene función de utilidad

$$u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (-R l_2 - x)$$

si l_2 es negativo (si el joven participa en el mercado y se endeuda) y es

$$u_2 = c_2 \cdot c_2'$$

si l_2 es cero. Por consiguiente, si no hay préstamos, un joven de G2 obtiene utilidad $u_2 = 4$ de $c_2 = 2$ y $c_2' = 2$. Si los hay,

$$u_2 = -(2 - l_2) \cdot \left(R^2 {l_2}^2 + 2Rl_2\right) = 5 \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{18}{11} > 4$$

donde $R = \frac{24}{11}$ y $l_2 = -l_1 = -\frac{1}{2}$.

Esto significa que <u>los prestatarios participan en el mercado y obtienen utilidad del pago de sus deudas</u>.

• Decisiones de los prestatarios con un parámetro α que pondera el aprecio de pagar deudas. El problema de todo prestatario es ahora

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' \cdot (-R \cdot l_2 - x)^{\alpha} \\ \text{sujeto a} & c_2 + l_2 = 2 \\ & c_2' = 2 + R \cdot l_2 + x \end{array}$$

donde $\alpha > 0$.

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, el problema es

$$\text{maximizar } \; u_2 = (2 - l_2) \cdot (2 + Rl_2 + x) \cdot (-Rl_2 - x)^{\alpha} \; \text{ respecto de } l_2 \text{ y } x$$

o

$$\text{maximizar } \; u_2 = (2 - l_2) \cdot (-y^{\alpha+1} + 2y^{\alpha}) \text{ respecto de } l_2 \text{ y } x$$

donde se ha definido $y = -Rl_2 - x$.

Maximizar respecto de x requiere

$$0 = \frac{du_2}{dx} = (2 - l_2) \cdot \left(-(\alpha + 1) \cdot y^{\alpha} \cdot \frac{dy}{dx} + 2\alpha \cdot y^{\alpha-1} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

o, ya que $\frac{dy}{dx} = -1$,

$$0 = (2 - l_2) y^{\alpha-1} \big((\alpha + 1)y - 2\alpha\big).$$

Una solución es $l_2 = 2$. Pero esta opción implica $c_2 = 0$ (y $u_2 = 0$, un valor mejorable). Otra solución se obtiene con $y = 0$, que significa que se impaga toda la deuda y se obtiene $u_2 = 0$. La tercera solución implica

$$y = 2\frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

De aquí,

$$x = -Rl_2 - y = -Rl_2 - \frac{2\alpha}{\alpha+1}.$$

Maximizar respecto de l_2 requiere

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = -2\frac{dy^{\alpha+1}}{dl_2} + 4\frac{dy^{\alpha}}{dl_2} + y^{\alpha+1} + l_2\frac{dy^{\alpha+1}}{dl_2} - y^{\alpha} - l_2\frac{dy^{\alpha}}{dl_2}$$

o

$$0 = (l_2 - 2)\frac{dy^{\alpha+1}}{dl_2} + (4 - l_2)\frac{dy^{\alpha}}{dl_2} + y^{\alpha+1} - y^{\alpha}$$

o

$$0 = (l_2 - 2)\left((\alpha+1)\cdot y^{\alpha}\cdot\frac{dy}{dl}\right) + (4 - l_2)\left(\alpha y^{\alpha-1}\cdot\frac{dy}{dl}\right) + y^{\alpha+1} - y^{\alpha}$$

o (dado que $\frac{dy}{dl_2} = -R$)

$$0 = (2 - l_2)\big((\alpha+1)y^{\alpha}R\big) + (l_2 - 4)(\alpha y^{\alpha-1}R) + y^{\alpha+1} - y^{\alpha}$$

o

$$0 = y^{\alpha}\big((2 - l_2)R(\alpha+1) - 1\big) + y^{\alpha-1}(l_2 - 4)\alpha R + y^{\alpha+1}$$

o

$$0 = y^{\alpha-1}((l_2 - 4)\alpha R + y\big((2 - l_2)R(\alpha+1) - 1\big) + y^2)$$

o

$$0 = (l_2 - 4)\alpha R + \frac{2\alpha}{\alpha+1}\big((2 - l_2)R(\alpha+1) - 1\big) + \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)^2$$

o

$$0 = (l_2 - 4)R + 2\cdot\frac{(2 - l_2)R(\alpha+1) - 1}{\alpha+1} + \alpha\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^2$$

o, haciendo $z = \alpha + 1$,

$$0 = (l_2 - 4)Rz^2 + 2(2 - l_2)Rz^2 - 2z + 4\alpha$$

o

$$0 = -l_2Rz^2 - 2z + 4\alpha$$

o

$$l_2 = \frac{2(\alpha - 1)}{R(\alpha+1)^2}.$$

Debido a $l_2 < 0$, <u>no hay solución si $\alpha \geq 1$</u>. A medida que α crece, el impacto sobre la utilidad del pago de la deuda (de la honestidad) es mayor. Por tanto, <u>atribuir al pago de la deuda al menos tanto valor como el consumo comporta la ausencia de solución al problema del prestatario</u>.

Si $\alpha < 1$, el equilibrio en el mercado de préstamos equivale a

$$l_1 + l_2 = \frac{1}{2} + \frac{2(\alpha - 1)}{R(\alpha + 1)^2}$$

o

$$\frac{1}{2} = \frac{2(1 - \alpha)}{R(\alpha + 1)^2}$$

y el tipo resultante es

$$\boxed{R = \frac{4(1 - \alpha)}{(\alpha + 1)^2}.}$$

Empleando un resultado previo

$$x = -Rl_2 - \frac{2\alpha}{\alpha + 1} = \frac{4(1 - \alpha)}{(\alpha + 1)^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{\alpha + 1} = 2 \cdot \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{(\alpha + 1)^2}.$$

Por la condición que $x > 0$, es necesario que

$$1 - 2\alpha - \alpha^2 > 0$$

o

$$\alpha(\alpha + 2) < 1.$$

Esta desigualdad supone que todo valor admisible de α para la existencia de equilibrio en el mercado de préstamos satisfaga

$$\boxed{\alpha < \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142.}$$

Interpretación: la existencia de una solución interior de equilibrio requiere que <u>la utilidad de una unidad del bien pagada para satisfacer una deuda valga menos de la mitad de una unidad consumida del bien</u>.