8. Modelo 1 con hijos

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• En el período inicial nacen n_0 personas iguales.

• Cada persona vive tres períodos consecutivos: niño, joven y adulto.

• Un niño está económicamente inactivo: un niño no toma ninguna decisión ni tiene dotación ni función de utilidad.

• Un joven decide el número n de hijos que nacerán en el mismo período (demografía endógena).

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c' \cdot n^\delta$, donde c es el consumo del bien de joven, c' el consumo de adulto, n el número de hijos y $\delta > 0$ es una constante.

• Todo adulto tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de bien de cada persona es de $w > 0$ unidades de joven y ninguna de adulto.

• Cada progenitor debe realizar un gasto de $\gamma > 0$ unidades de bien por hijo. El gasto se realiza en el mismo período en que se tienen los hijos.

• Cada hijo paga una pensión de $p > 0$ unidades de bien a su progenitor cuando el progenitor es adulto. Se asume que $p < w$.

• <u>¿Cuántas personas nacen en cada período</u>? ¿Cuál es la dinámica de la población total (extinción, estabilidad, crecimiento)?

2. Decisión de natalidad

• **Decisión de natalidad de los jóvenes.** El problema de todo joven es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = c \cdot c' \cdot n^\delta \;\; \text{con respecto a } c,\, c' \text{ y } n \\ \text{sujeto a} & c + \gamma n + p = w \\ & c' = pn\,. \end{array}$$

Tras introducir las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar} \;\; u = (w - \gamma n - p) \cdot (pn) \cdot n^\delta \;\; \text{con respecto a } n$$

o

$$\text{maximizar} \;\; u = wpn^{\delta+1} - \gamma pn^{\delta+2} - p^2 n^{\delta+1} \;\; \text{con respecto a } n$$

Maximizar con respecto a n requiere

$$0 = \frac{du}{dn} = wp(\delta+1)n^\delta - \gamma p(\delta+2)n^{\delta+1} - p^2(\delta+1)n^\delta.$$

Esto es,

$$0 = pn^{\delta}(w(\delta + 1) - \gamma(\delta + 2)n - p(\delta + 1))\,.$$

Si $n \neq 0$,

$$0 = w(\delta + 1) - \gamma(\delta + 2)n - p(\delta + 1)\,.$$

En resumen,

$$\boxed{n = \frac{(\delta + 1)(w - p)}{(\delta + 2)\gamma}\,.}$$

Se comprueba fácilmente que el número de hijos depende:

- positivamente de la dotación $\left(\frac{dn}{dw} > 0\right)$;
- negativamente de la pensión $\left(\frac{dn}{dp} < 0\right)$;
- negativamente del gasto en hijos $\left(\frac{dn}{d\gamma} < 0\right)$; y
- positivamente de la preferencia por los hijos $\left(\frac{dn}{d\delta} > 0\right)$.

3. Dinámica demográfica

En los siguientes cálculos no se incluyen los niños (rehaz los cálculos si se añaden).

En el período inicial (sea $t = 0$) hay, por definición, n_0 personas jóvenes.

En $t = 1$ hay

$$n_1 = n_0 + n \cdot n_0$$

donde n_0 es el número de adultos y $n \cdot n_0$ el número de jóvenes.

En $t = 2$ hay

$$n_2 = n \cdot n_0 + n(n \cdot n_0)$$

donde $n \cdot n_0$ es el número de adultos y $n^2 \cdot n_0$ el número de jóvenes.

En $t = 3$ hay

$$n_2 = n^2 n_0 + n(n^2 n_0)$$

dónde $n^2 n_0$ es el número de adultos y $n^3 n_0$ el número de jóvenes.

Por inducción se concluye que en $t \geq 1$ hay

$$n_t = n^t n_0 + n(n^t n_0) = n_0(n^t + n^{t+1})$$

donde $n^t n_0$ es el número de adultos y $n^{t+1} n_0$ el número de jóvenes.

Hay tres casos.

- Si $n = 1$ (cada progenitor tiene únicamente un hijo), entonces, para todo $t \geq 1$, $n_t = 2n_0$. Esto significa que la población total permanece <u>constante</u> cada período.

- Si $n > 1$ (cada progenitor tiene más de un hijo), entonces tanto n^t como n^{t+1} crecen sin límite. Esto significa que la población total crece <u>exponencialmente</u>.

- Si $n < 1$ (cada progenitor tiene menos de un hijo[1]), entonces tanto n^t como n^{t+1} decrecen. Esto significa que la población total <u>decrece</u> y tiende a cero.

• **Ejercicio.** ¿Y si cada hijo tuviera que pagar p a cada adulto del período (no sólo a su progenitor)? En este caso, cada adulto se beneficia de los hijos que han decidido tener los demás. Una posibilidad interesante a analizar es si, y en qué condiciones, este hecho desincentiva la natalidad hasta el punto de que la población acabe extinguiéndose.

[1] ¿Existe alguna interpretación que dé sentido a que el número de hijos sea inferior a 1? ¿Y alguna a que el número de hijos no sea un número entero?