9. Modelo 1bis: Herencias

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Cada persona vive dos períodos consecutivos.

• En cada grupo cada período hay una biyección entre jóvenes y mayores del grupo. La biyección vincula a cada joven con exactamente un mayor del grupo.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor.

• Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c' \cdot h$, donde h es la cantidad de bien que, como herencia, la persona mayor transfiere al joven de su mismo grupo con el que está vinculado.

• La dotación de cada miembro de G1 es $(0, w)$: ninguna unidad de joven y $w > 0$ de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es $(w, 0)$: w unidades de joven y ninguna de mayor.

2. Decisiones

• **Decisiones en t de los mayores de G1 sobre herencias.** El problema de todo mayor es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u'_{1,t} = c'_{1,t} \cdot h_{1,t} \;\text{ con respecto a } c'_{1,t} \text{ y } h_{1,t} \\ \text{sujeto a} & c'_{1,t} + h_{1,t} = w + R_{t-1} l_{1,t-1} \end{array}$$

donde $h_{1,t}$ es la herencia entregada en t al joven correspondiente, $l_{1,t-1}$ son los préstamos ofrecidos/pedidos en el período anterior $t-1$ cuando la persona era joven y R_{t-1} es el tipo de interés del período anterior. Se detallan los índices temporales para evitar ambigüedades.

Tras introducir la restricción en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar} \;\; u'_{1,t} = \left(w + R_{t-1} l_{1,t-1} - h_{1,t}\right) \cdot h_{1,t} \;\text{ con respecto a } h_{1,t}\,.$$

Maximizar con respecto a $h_{1,t}$ requiere

$$0 = \frac{du'_{1,t}}{dh_{1,t}} = w + R_{t-1} l_{1,t-1} - 2h_{1,t}.$$

Esto es,

$$\boxed{h_{1,t} = \frac{w + R_{t-1} l_{1,t-1}}{2}\,.} \tag{1}$$

La condición (1) dice que una persona mayor deja como herencia la mitad del valor de lo que tiene (dotación w más rendimiento $R_{t-1} l_{1,t-1}$ de préstamos pasados).

¿Por qué conviene especificar los subíndices temporales? El problema recién resuelto se refiere a la persona designada 'mayor 1' en la Fig. 1.

$t-1$	t	$t+1$
joven 1	mayor 1	
	joven 2	mayor 2

Fig. 1. Similitud y diferencias de problemas de decisión

El destinatario de la herencia decidida por mayor 1 es joven 2. Pero joven 2 también debe tener en cuenta qué herencia dejará cuando sea mayor 2. ¿Cómo de similares son los problemas de decisión de mayor 1 y mayor 2? Si son problemas equivalentes, entonces joven 2 puede incorporar en su problema de decisión la solución de mayor 1. Si no son equivalentes el análisis se complica, porque mayor 2 (y, por extensión, joven 2) deben volver a buscar la solución porque la encontrada por mayor 1 no sería aplicable a su caso. Los subíndices se pueden eliminar si el problema de mayor 2 es el mismo que el de mayor 1, sólo que en un período distinto. Cuando se debe comprobar que los problemas efectivamente son iguales es necesario de entrada reintroducir los índices temporales para no confundir variables ni problemas de decisión.

• **Decisiones en t de los jóvenes de G1 sobre préstamos.** El problema de todo joven es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_{1,t} = c_{1,t} \cdot c'_{1,t+1} \ \text{ con respecto a } c_{1,t},\ c'_{1,t+1} \text{ y } l_{1,t} \\ \text{sujeto a} & c_{1,t} + l_{1,t} = h_{1,t} \\ & c'_{1,t+1} + h_{1,t+1} = w + R_t l_{1,t} \end{array}$$

donde $h_{1,t}$ es la herencia recibida de joven y $h_{1,t+1}$ es la herencia a dejar de mayor.

Inicialmente se podría pensar que, como todos los mayores se enfrentan al mismo problema de decisión, su herencia será la misma. En un sentido, la apreciación es correcta. La clave está en los matices: el joven t recibe la herencia

$$h_{1,t} = \frac{w + R_{t-1} l_{1,t-1}}{2}$$

y deja la herencia

$$h_{1,t+1} = \frac{w + R_t l_{1,t}}{2}.$$

Los tipos de interés involucrados son diferentes: el tipo de interés que afecta a la herencia que hace mayor 1 de la Fig. 1 (herencia que recibe joven 2) no es el mismo tipo que afecta a la herencia que hace mayor 2 (y que tiene en cuenta joven 2). Concretando: cuando (1) se sustituye en la restricción presupuestaria de joven 2, el tipo de interés en la expresión de $h_{1,t}$ (el tipo que tuvo en cuenta mayor 1) no es el tipo R_t que aparece en la restricción presupuestaria de mayor 2.

Continuando con la solución, si se insertan las restricciones en la función objetivo, resulta el problema de

$$\text{maximizar } \; u_{1,t} = \left(h_{1,t} - l_{1,t}\right) \cdot \left(w + R_t l_{1,t} - h_{1,t+1}\right) \; \text{ con respecto a } l_{1,t}.$$

Empleando (1), es necesario

$$\text{maximizar } \; u_{1,t} = \left(\tfrac{1}{2}(w + R_{t-1} l_{1,t-1}) - l_{1,t}\right) \cdot \left(w + R_t l_{1,t} - h_{1,t+1}\right) \; \text{ con respecto a } l_{1,t}.$$

En el problema anterior, $l_{1,t-1}$ es historia: son los préstamos decididos por un joven de G1 en el período anterior. Para determinar, $h_{1,t+1}$ el joven debe resolver el problema de decisión que tendrá de mayor. Este problema es idéntico al problema resuelto anteriormente y que tuvo solución (1). La única diferencia es que las variables se han desplazado una unidad en el tiempo. Adaptando (1),

$$h_{1,t+1} = \frac{w + R_t l_{1,t}}{2}.$$

Ahora se trata de

$$\text{maximizar } \; u_{1,t} = \left(\tfrac{1}{2}(w + R_{t-1} l_{1,t-1}) - l_{1,t}\right) \cdot \left(w + R_t l_{1,t} - \tfrac{1}{2}(w + R_t l_{1,t})\right) \; \text{ con respecto a } l_{1,t}$$

o

$$\text{maximizar } \; u_{1,t} = \tfrac{1}{4}\left(w + R_{t-1} l_{1,t-1} - 2 l_{1,t}\right) \cdot \left(w + R_t l_{1,t}\right) \; \text{ con respecto a } l_{1,t}$$

o

$$\text{maximizar } \; u_{1,t} = \left(w + R_{t-1} l_{1,t-1} - 2 l_{1,t}\right) \cdot \left(w + R_t l_{1,t}\right) \; \text{ con respecto a } l_{1,t}.$$

Maximizar con respecto a $l_{1,t}$ requiere

$$0 = \frac{du_{1,t}}{dl_{1,t}} = wR_t + R_t R_{t-1} l_{1,t-1} - 2w - 4R_t l_{1,t}.$$

De aquí,

$$l_{1,t} = \frac{wR_t - 2w + R_t R_{t-1} l_{1,t-1}}{4R_t}.$$

Simplificando,

$$\boxed{l_{1,t} = \frac{w}{4} - \frac{w}{2R_t} + \frac{R_{t-1} l_{1,t-1}}{4}\,.} \tag{2}$$

• **Decisiones en t de los mayores de G2 sobre herencias.** El problema de todo mayor es

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \; u'_{2,t} = c'_{2,t} \cdot h_{2,t} \; \text{ con respecto a } c'_{2,t} \text{ y } h_{2,t} \\ &\text{sujeto a } \quad c'_{2,t} + h_{2,t} = R_{t-1} l_{2,t-1} \end{aligned}$$

o

$$\text{maximizar } \; u'_{2,t} = \left(R_{t-1} l_{2,t-1} - h_{2,t}\right) \cdot h_{2,t} \; \text{ con respecto a } h_{2,t}$$

Para maximizar con respecto a $h_{2,t}$

$$0 = \frac{du'_{2,t}}{dh_{2,t}} = R_{t-1} l_{2,t-1} - 2h_{2,t}$$

y así

$$\boxed{h_{2,t} = \frac{R_{t-1} l_{2,t-1}}{2}.} \tag{3}$$

• **Decisiones en t de los jóvenes de G2 sobre préstamos.** El problema de todo joven es

maximizar $u_{2,t} = c_{2,t} \cdot c'_{2,t+1}$ con respecto a $c_{2,t}$, $c'_{2,t+1}$ y $l_{2,t}$
sujeto a $c_{2,t} + l_{2,t} = w + h_{2,t}$
$c'_{2,t+1} + h_{2,t+1} = R_t l_{2,t}$

donde $h_{2,t}$ es la herencia recibida de joven y $h_{2,t+1}$ es la herencia a dejar de mayor, y que equivale a

maximizar $u_{2,t} = (w + h_{2,t} - l_{2,t}) \cdot (R_t l_{2,t} - h_{2,t+1})$ con respecto a $l_{2,t}$.

Empleando (3), el problema se transforma en

maximizar $u_{2,t} = \left(w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - l_{2,t}\right) \cdot (R_t l_{2,t} - h_{2,t+1})$ con respecto a $l_{2,t}$.

Adaptando (3),

$$h_{2,t+1} = \frac{R_t l_{2,t}}{2}.$$

En suma, se trata de

maximizar $u_{2,t} = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - l_{2,t}\right) \cdot R_t l_{2,t}$ con respecto a $l_{2,t}$

o

maximizar $u_{2,t} = \left(w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - l_{2,t}\right) \cdot l_{2,t}$ con respecto a $l_{2,t}$.

Maximizar respecto de $l_{2,t}$ requiere

$$0 = \frac{du_{2,t}}{dl_{2,t}} = w + \frac{1}{2} R_{t-1} l_{2,t-1} - 2 l_{2,t}.$$

En conclusión,

$$\boxed{l_{2,t} = \frac{w}{2} + \frac{1}{4} R_{t-1} l_{2,t-1}.} \tag{4}$$

3. Mercados

• **Equilibrio en el mercado de préstamos.** Por (2), (4) y la condición de equilibrio

$$n \cdot l_{1,t} + n \cdot l_{2,t} = 0$$

en el mercado de préstamos en el período t, se tiene que

$$l_{1,t} + l_{2,t} = 0$$

$$\left(\frac{w}{4} - \frac{w}{2R_t} + \frac{R_{t-1}l_{1,t-1}}{4}\right) + \left(\frac{w}{2} + \frac{1}{4}R_{t-1}l_{2,t-1}\right) = 0$$

$$3w - \frac{2w}{R_t} + R_{t-1}l_{1,t-1} + R_{t-1}l_{2,t-1} = 0$$

Por la condición de equilibrio $l_{1,t-1} + l_{2,t-1} = 0$ en $t-1$,

$$3w - \frac{2w}{R_t} = 0$$

y, así,

$$\boxed{R_t = \frac{2}{3}\,.} \tag{5}$$

El resultado (5) vale excepto en el primer período (en que los jóvenes no reciben herencia). Por (2) y (5),

$$l_{1,t} = -\frac{w}{2} + \frac{l_{1,t-1}}{6}\,.$$

La <u>solución l_1^* de estado estacionario</u> (la solución que satisface $l_{1,t} = l_{1,t-1}$) es única:

$$l_1^* = -\frac{3w}{5}\,.$$

Por (4) y (5),

$$l_{2,t} = \frac{w}{2} + \frac{l_{2,t-1}}{6}\,.$$

La solución l_2^* de estado estacionario es única:

$$l_2^* = \frac{3w}{5}\,.$$

Con (5), (1) y (3), y los estados estacionarios l_1^*y l_2^*, se pueden calcular los estados estacionarios de las herencias, h_1^* y h_2^*. Por (1),

$$\boxed{\begin{gathered} h_1^* = \frac{w}{2} + \frac{l_1^*}{3} = \frac{w}{2} - \frac{w}{5} = \frac{3w}{10}\,. \\[2ex] h_2^* = \frac{l_2^*}{3} = \frac{w}{5} = \frac{2w}{10}\,. \end{gathered}}$$

Por (3),

En los valores de estado estacionario de las herencias, la herencia que recibe un joven es igual a la herencia que deja como mayor. Según estos resultados:

- <u>el grupo de personas pobres de jóvenes</u> (grupo G1) <u>dejan, de mayores, una herencia superior</u> a la que dejan los mayores del grupo inicialmente rico (grupo G2);
- simétricamente, <u>los jóvenes pobres reciben una mayor herencia ($3w/10$, el 30% de la dotación) que los jóvenes ricos</u> ($2w/10$, el 20% de la dotación).