10. Tres períodos de vida

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse. Cada período nacen n personas idénticas que viven tres períodos consecutivos: joven, adulto y mayor. Se tiene dotación del bien sólo en el segundo período de vida: una unidad del bien. Las funciones de utilidad de una persona nacida en t son:

- en t, $u_t = c_t c_{t+1}$;
- en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1} c_{t+2}$; y
- en $t+2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$.

• Interpretación: se nace y muere pobre; sólo se tiene dotación en el período intermedio de vida; y sólo interesa el consumo presente y el inmediatamente posterior (el futuro distante no importa).

2. Análisis de decisiones

• **Tipos de persona.** Por lo general, en un período t habrá tres tipos de personas: los nacidos en t, los nacidos en $t-1$ y los nacidos en $t-2$ (los nacidos antes de $t-2$ ya no están vivos).

• **Participantes en el mercado de préstamos.** Los nacidos en $t-2$ terminan su vida en t, por lo que no participarán en el mercado de préstamos de t y sólo los nacidos en $t-1$ y en t formarán parte del mercado de préstamos en t. La Fig. 1 (donde los números 0 y 1 representan dotaciones) indica los participantes en cada mercado.

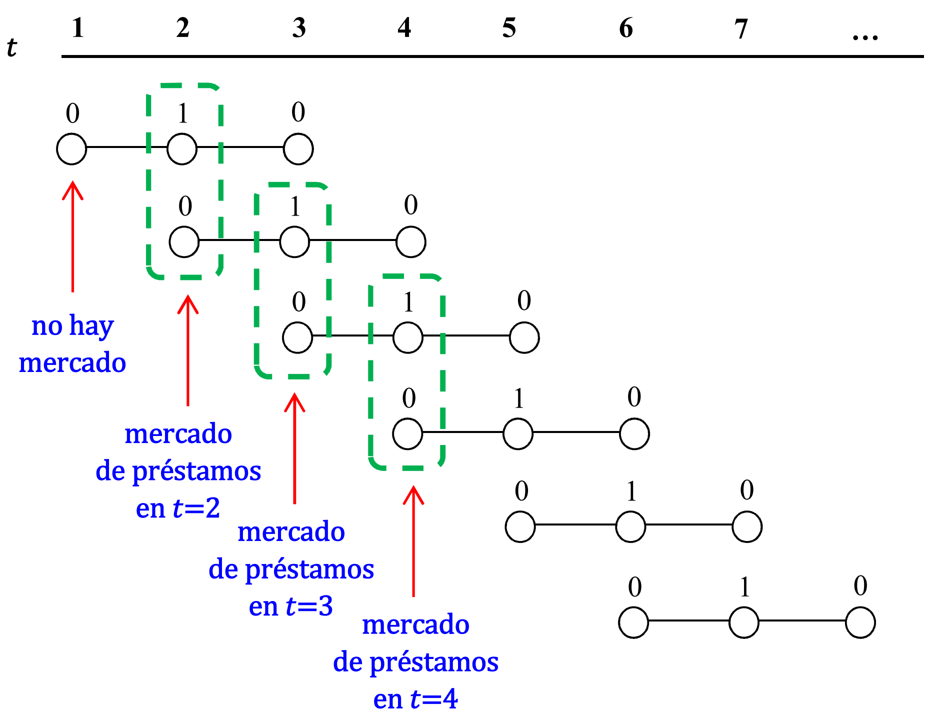


Fig. 1. Estructura demográfica y participantes en los mercados de préstamos

• Notación. El superíndice '1' designará a una persona joven; '2', una persona adulta; y '3', una persona mayor. Por tanto:

- c_t^1 representará el consumo de un joven en el período t,
- c_t^2 el consumo de un adulto en t y
- c_t^3 el consumo de un mayor en t.

Cuando quede claro de qué período se trata, c^i abreviará c_t^i, donde $i \in \{1, 2, 3\}$. La misma convención se aplica a otras variables, como u y l.

• Decisiones en el período inicial $t = 1$. En $t = 1$ sólo hay jóvenes. Dado que todos ellos son idénticos no hay mercado de préstamos (todo joven, al no tener dotación, quería endeudarse).

• Decisiones en el período $t \geq 2$. Cada joven del período $t \geq 2$ pretende

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_t^1 = c_t^1 c_{t+1}^2 \text{ con respecto a } c_t^1 \text{ y } l_t^1 & \\ \text{sujeto a} & c_t^1 + l_t^1 = 0 & \text{(restricción presupuestaria en } t\text{)} \\ & c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t l_t^1 & \text{(restricción presupuestaria en } t+1\text{)} \end{array}$$

donde

- c_t^1 es el consumo de joven (en t),
- c_{t+1}^2 es el consumo de adulto (en $t + 1$),
- l_t^1 son los préstamos de joven ($l_t^1 < 0$ porque un joven no tiene dotación),
- l_{t+1}^2 son los préstamos de adulto ($l_{t+1}^2 > 0$ porque de mayor no se tendrá dotación) y
- R_t es el tipo de interés del período t.

Este problema equivale a

$$\text{maximizar } \ u_t^1 = -l_t^1(1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \ \text{ con respecto a } l_t^1 \,.$$

Es razonable suponer que toda persona es inteligente, en el sentido de que se entiende cómo las decisiones del presente condicionan las decisiones del futuro. Esto implica que todo joven deberá anticipar cómo su decisión sobre l_{t+1}^2 de adulto está condicionada por su decisión sobre l_t^1 de joven. Por consiguiente, todo joven tendrá que resolver su problema de decisión de adulto.

Todo adulto en $t \geq 3$ pretende

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_t^2 = c_t^2 c_{t+1}^3 \text{ con respecto a } c_t^2 \text{ y } l_t^2 & \\ \text{sujeto a} & c_t^2 + l_t^2 = 1 + R_{t-1} l_{t-1}^1 & \text{(restricción presupuestaria en } t\text{)} \\ & c_{t+1}^3 = R_t l_t^2 & \text{(restricción presupuestaria en } t+1\text{)} \end{array}$$

donde

- c_t^2 es el consumo de adulto (en t),
- c_{t+1}^3 es el consumo de mayor (en t+1),
- l_t^2 son los préstamos de adulto ($l_t^2 > 0$ porque de mayor no se tendrá dotación),

- l_{t-1}^1 son los préstamos de joven del período anterior,
- R_{t-1} es el tipo de interés del período anterior y
- R_t es el tipo de interés del período corriente t.

En este problema R_{t-1} y l_{t-1}^1 son variables exógenas (parámetros), puesto que son decisiones ya tomadas. El problema equivale a

$$\text{maximizar } \; u_t^2 = (1 + R_{t-1}l_{t-1}^1 - l_t^2)R_t l_t^2 \; \text{ con respecto a } l_t^2 \, .$$

La presunción de que el mercado de préstamos es competitivo implica que se trata R_t como un parámetro. Dado que maximizar una función equivale a maximizar cualquier múltiplo de la función, R_t es irrelevante. Así, un adulto tiene como objetivo

$$\text{maximizar } \; (1 + R_{t-1}l_{t-1}^1 - l_t^2)l_t^2 \; \text{ con respecto a } l_t^2 \, .$$

La solución es

$$\boxed{l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1}l_{t-1}^1}{2}}$$

Empleando las restricciones presupuestarias,

$$c_t^2 = \frac{1 + R_{t-1}l_{t-1}^1}{2}$$

y

$$c_{t+1}^3 = R_t \frac{1 + R_{t-1}l_{t-1}^1}{2} \, .$$

En la medida que todos los adultos son iguales cada período, la solución para un adulto en t es esencialmente la misma que la de un adulto en $t + 1$ (únicamente hay que mover el subíndice temporal un período adelante):

$$l_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t l_t^1}{2} \, .$$

Esta ecuación representa la decisión que un joven en t anticipa que él mismo hará de adulto en $t + 1$. Insertándola en el problema de maximización de un joven de t,

$$\text{maximizar } \; u_t^1 = -l_t^1(1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \; \text{ con respecto a } l_t^1$$

deviene

$$\text{maximizar } \; u_t^1 = -l_t^1(1 + R_t l_t^1 - \tfrac{1 + R_t l_t^1}{2}) \; \text{ con respecto a } l_t^1$$

o bien

$$\text{maximizar } \; u_t^1 = -l_t^1 \tfrac{1 + R_t l_t^1}{2} \; \text{ con respecto a } l_t^1$$

o, equivalentemente,

$$\text{maximizar } \; u_t^1 = -l_t^1(1 + R_t l_t^1) \; \text{ con respecto a } l_t^1$$

La solución es

$$\boxed{l_t^1 = -\frac{1}{2R_t}.}$$

Empleando la restricción $c_t^1 + l_t^1 = 0$,

$$c_t^1 = \frac{1}{2R_t}$$

y, dado que

$$c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t l_t^1$$

y que

$$l_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t l_t^1}{2},$$

se concluye que

$$c_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t l_t^1}{2} = \frac{1 - R_t \dfrac{1}{2R_t}}{2} = \frac{1}{4}.$$

En resumen, para todo $t \geq 2$, <u>dos ecuaciones representan las decisiones de un joven en t</u>:

$$l_t^1 = -\frac{1}{2R_t}$$

y

$$c_t^1 = \frac{1}{2R_t}.$$

Para todo $t \geq 3$, <u>dos ecuaciones representan las decisiones de un adulto en t</u>:

$$l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} l_{t-1}^1}{2} = \frac{1 - \dfrac{R_{t-1}}{2R_{t-1}}}{2} = \frac{1}{4}$$

y

$$c_t^2 = \frac{1}{4}.$$

Lo único que queda pendiente es determinar las decisiones de un adulto en $t = 2$. Este caso es especial porque <u>un adulto en $t = 2$ no se pudo endeudar de joven</u>, en $t = 1$ (todo adulto en $t \geq 3$ pudo endeudarse en el período anterior, de joven).

En $t = 2$, el objetivo de cada adulto es

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_t^2 = c_t^2 c_{t+1}^3 & \text{con respecto a } c_t^2 \text{ y } l_t^2 \\ \text{sujeto a} & c_t^2 + l_t^2 = 1 & \text{(restricción presupuestaria en } t\text{)} \\ & c_{t+1}^3 = R_t l_t^2 & \text{(restricción presupuestaria en } t+1\text{)} \end{array}$$

donde

- c_t^2 es el consumo presente de adulto,
- c_{t+1}^3 es el consumo futuro de mayor,

- l_t^2 son los préstamos de adulto ($l_t^2 > 0$ porque de mayor no se tendrá dotación) y
- R_t es el tipo de interés del período corriente t.

Este problema equivale a

$$\text{maximizar } u_t^2 = (1 - l_t^2) R_t l_t^2 \text{ con respecto a } l_t^2 .$$

La presunción de que el mercado de préstamos es competitivo implica que R_t se trata como un parámetro. Ya que maximizar una función equivale a maximizar cualquier múltiplo de la función, R_t es irrelevante. Así, un adulto quiere

$$\text{maximizar } u_t^2 = (1 - l_t^2) l_t^2 \text{ con respecto a } l_t^2 .$$

La solución es

$$\boxed{l_t^2 = \frac{1}{2}.}$$

Dadas las restricciones presupuestarias,

$$\boxed{c_t^2 = \frac{1}{2}}$$

y

$$\boxed{c_{t+1}^3 = \frac{R_t}{2}.}$$

3. Análisis de mercados

• **Equilibrios en $t = 2$.** En $t = 2$ hay n jóvenes y n adultos. El equilibrio en el mercado de préstamos (oferta total igual a demanda total) requiere

$$n \cdot l_t^2 = -n \cdot l_t^1$$

donde nl_t^2 es la oferta total de préstamos (de los adultos) y $-nl_t^1$ es la demanda total (de los jóvenes). El signo negativo se añade porque $l_t^1 < 0$. Esto es,

$$nl_t^2 + nl_t^1 = 0.$$

Una vez cancelado el valor n,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2R_t} = 0$$

Como resultado, el tipo de interés de equilibrio en $t = 2$ es

$$\boxed{R_t = 1 .}$$

Si se invocase la igualdad entre la oferta total del bien en $t = 2$ (la dotación total del bien en $t = 2$) y la demanda total del bien en $t = 2$ (la suma del consumo que se desea hacer en $t = 2$) se tendría

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n \cdot c_t^1 + n \cdot c_t^2$$

donde $n \cdot 1$ es la dotación total de los adultos en $t = 2$, $n \cdot 0$ es la dotación total de los jóvenes en $t = 2$, $n \cdot c_t^1$ es la demanda total del bien de los jóvenes en $t = 2$ y $n \cdot c_t^2$ es la demanda total del bien de los adultos en $t = 2$. Así que, tras cancelar n,

$$1 = \frac{1}{2R_t} + \frac{1}{2},$$

de donde se concluye

$$R_t = 1.$$

En resumen: el mismo resultado que analizando el mercado de préstamos.

Recapitulando, el equilibrio en $t = 2$ implica un tipo de interés $R_t = 1$ y consumos $c_t^1 = c_t^2 = 1/2$.

• **Equilibrios en $t \geq 3$.** En todo $t \geq 3$ hay n jóvenes, n adultos y n mayores. Sólo jóvenes (como prestatarios) y adultos (como prestamistas) participan en el mercado de préstamos, ya que nadie prestará a un mayor.

El equilibrio en el mercado de préstamos (oferta total igual a demanda total) requiere

$$nl_t^2 = -nl_t^1$$

donde nl_t^2 es la oferta total de préstamos y $-nl_t^1$ es la demanda total (añádese el signo negativo porque $l_t^1 < 0$). Partiendo de

$$nl_t^2 + nl_t^1 = 0$$

y cancelando n se obtiene

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2R_t} = 0\,.$$

El tipo de interés de equilibrio resultante en $t \geq 3$ es

$$\boxed{R_t = 2\,.}$$

Los consumos asociados en $t \geq 4$ son:

- para jóvenes, $c_t^1 = \frac{1}{2R_t} = \frac{1}{4}$;
- para adultos, $c_t^2 = \frac{1}{2}$;
- para mayores , $c_t^3 = R_{t-1} l_{t-1}^2 = R_{t-1}\frac{1}{4} = \frac{R_{t-1}}{4}$.

La diferencia en $t = 3$ es que $c_t^3 = R_{t-1} l_{t-1}^2 = R_{t-1} \frac{1}{2} = \frac{R_{t-1}}{2}$.

La igualdad de la oferta total del bien en t (la dotación total del bien en t) y la demanda total del bien en t (la suma del consumo que se quiere hacer en t) establece que

$$n \cdot 0 + n \cdot 1 + n \cdot 0 = n \cdot c_t^1 + n \cdot c_t^2 + n \cdot c_t^3$$

donde $n \cdot 1$ es la dotación total de los adultos en t, $n \cdot 0$ es tanto la dotación total de los jóvenes como la de los mayores en t, $n \cdot c_t^1$ es la demanda total del bien de los jóvenes en t, $n \cdot c_t^2$ es la demanda total del bien de los adultos en t y $n \cdot c_t^3$ es la demanda total del bien de los mayores en t. Tras cancelar n se llega a

$$1 = c_t^1 + c_t^2 + c_t^3 \, .$$

Para $t \geq 4$, $c_t^1 = \frac{1}{2R_t}$, $c_t^2 = \frac{1}{4}$ y $c_t^3 = R_{t-1} l_{t-1}^2 = R_{t-1} \frac{1}{4}$. Por consiguiente, cuando $t \geq 4$,

$$1 = \frac{1}{2R_t} + \frac{1}{4} + \frac{R_{t-1}}{4} .$$

Reordenando,

$$3 = \frac{2}{R_t} + R_{t-1} \, .$$

Despejando R_t,

$$\boxed{R_t = \frac{2}{3 - R_{t-1}} \, .} \tag{1}$$

Esta ecuación establece la <u>dinámica del tipo de interés para $t \geq 4$</u> cuando se iguala dotación total y consumo total (R_1 no está definido porque no existe mercado de préstamos, $R_2 = 1$ y, según el análisis del mercado de préstamos, $R_3 = 2$). La Fig. 2 representa gráficamente la ecuación (1).

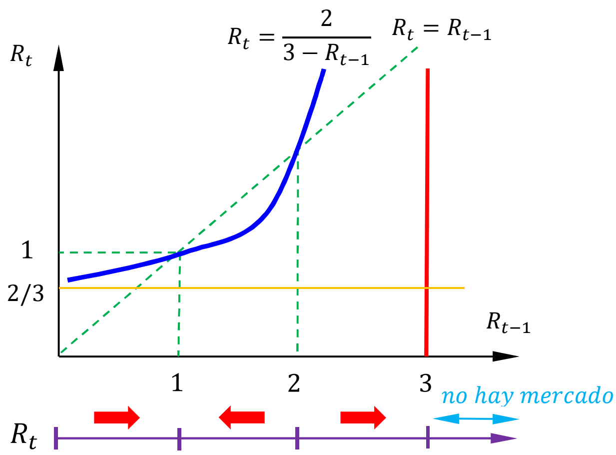


Fig. 2. Dinámica del tipo de interés sobre la base de igualar dotación y consumo

4. Observaciones

• En un sentido, la ecuación $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$ es innecesaria. Si el análisis se restringe al mercado de préstamos, entonces, como se muestra en la p. 6, $R_t = 2$ para todo $t \geq 3$. Por tanto, a partir del período 3, sólo un valor del tipo de interés equilibra el mercado de préstamos: $R = 2$.

• Por otra parte, la ecuación $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$ demuestra que el análisis de equilibrio del mercado de préstamos no es equivalente al análisis de igualdad entre dotaciones y demandas de consumo. Incluso considerando sólo los estados estacionarios de la dinámica representada por $R_t = \frac{2}{3-R_{t-1}}$, se tienen dos valores del tipo de interés que igualan dotaciones y demandas.

Gráficamente, los valores del tipo de interés de los estados estacionarios de la trayectoria (1) son los puntos de intersección de la gráfica de la trayectoria (la curva azul) con la diagonal principal $R_t = R_{t-1}$ (la línea verde discontinua). Algebraicamente, los valores de los estados estacionarios se obtienen resolviendo la ecuación

$$R = \frac{2}{3-R}.$$

Los valores resultantes son $R = 1$ y $R = 2$. El valor $R = 2$ también equilibra el mercado de préstamos, pero el valor $R = 1$ no: si $R = 1$, la cantidad ofrecida de préstamos es $\frac{n}{4}$, pero la cantidad demanda es $\frac{n}{2R} = \frac{n}{2}$. Esto significa que hay un exceso de demanda de préstamos $\frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}$.

• Una pega de la ecuación (1) es que no garantiza el cumplimiento de las restricciones presupuestarias (¿es, por tanto, válida?). Por ejemplo, con $R = 1$,

$$c^1 = \frac{1}{2} \qquad c^2 = \frac{1}{4} \qquad c^3 = \frac{1}{4}$$

(con $R = 2$, $c^1 = c^2 = \frac{1}{4}$ y $c^3 = \frac{1}{2}$).

Cuando $R = 1$, hay desequilibrio en el mercado de préstamos, dado que $l^1 = -\frac{1}{2}$ y $l^2 = \frac{1}{4}$. Si se interpreta que se impone el lado corto del mercado, los préstamos que efectivamente reciben los jóvenes son $\frac{1}{4}$ y no $\frac{1}{2}$. El resultado es que la restricción presupuestaria de los jóvenes $c^1 + l^1 = 0$ no se satisface: $c^1 = \frac{1}{2}$ y sin embargo $l^1 = -\frac{1}{4}$ (dado que cada prestamista no presta más de $\frac{1}{4}$).

En este caso tampoco se satisface la restricción de adulto: $c^2 + l^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1 + Rl^1 = 1 - \frac{1}{4}$. Así, los jóvenes quedan por encima de la restricción y los adultos por debajo.

Con todo, sí se cumple la restricción presupuestaria intertemporal de jóvenes y adultos: los valores de consumos y préstamos efectivos que genera $R = 1$ satisfacen la suma de las restricciones de jóvenes y adultos.

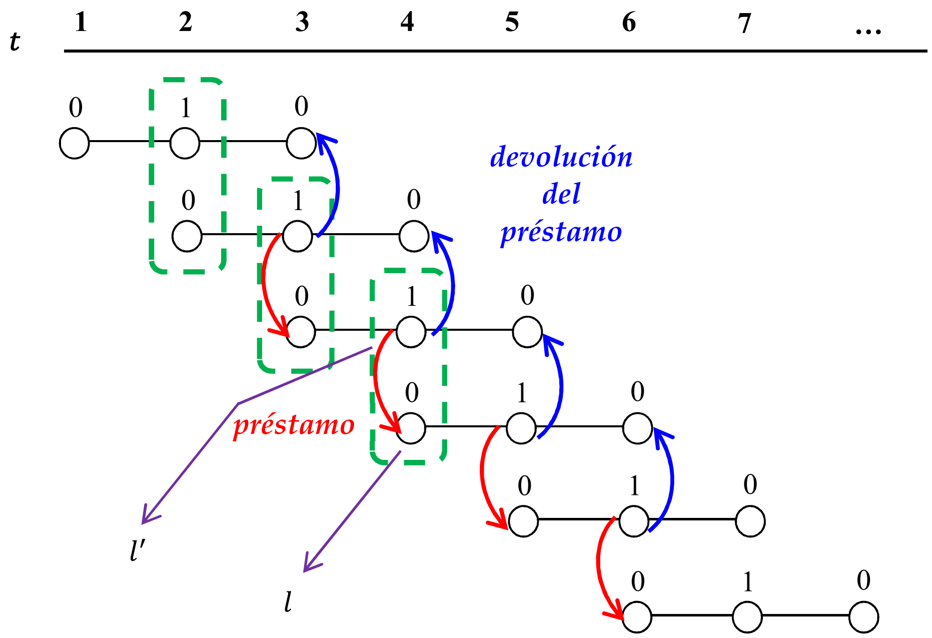
5. Vía directa a la solución

Se ofrece a continuación un análisis más simple y directo, junto con la pregunta de si es válido.

• **Decisión sobre préstamos en el segundo período de vida.** Los nacidos en $t-1$ se enfrentan en t al problema de

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & u' = c'c'' & \\
\text{sujeto a} & c' + l' = 1 + Rl & \text{(restricción de adulto)} \\
 & c'' = R'l' & \text{(restricción de mayor)}
\end{array}
$$

donde c' es el consumo presente (de adulto), c'' es el consumo del período siguiente (de mayor), l son los préstamos en el período anterior, l' son los préstamos en el período presente, R es el tipo de interés del período anterior y R' es el tipo de interés del período presente. Dado que en el período anterior $t-1$ no se disponía de dotación, $l < 0$: los nacidos en $t-1$ se endeudan en $t-1$. La deuda correspondiente $Rl < 0$ se paga en t. Por otra parte, dado que los nacidos en $t-1$ no tienen dotación en $t+1$ deberán ahorrar en el período presente t; es decir, $l' > 0$. El siguiente esquema ilustra esta argumentación.



Combinando las dos restricciones presupuestarias se obtiene la restricción presupuestaria de los dos últimos períodos de vida:

$$c' + \frac{c''}{R'} = 1 + Rl.$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = c'c'' + \lambda\left(1 + Rl - c' - \frac{c''}{R'}\right).$$

Las condiciones necesarias para alcanzar un máximo de $\mathcal{L}$ son

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c'' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c''} = c' - \frac{\lambda}{R'}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 + Rl - c' - \frac{c''}{R'}.$$

Se sigue de las dos primeras condiciones que

$$c' = \frac{c''}{R'}.$$

Introduciendo esta ecuación en la tercera condición

$$c' = \frac{1 + Rl}{2}.$$

Sabiendo que $c' + l' = 1 + Rl$, la conclusión es que

$$l' = 1 + Rl - c' = 1 + Rl - \frac{1 + Rl}{2} = \frac{1 + Rl}{2} = c'.$$

Así pues, en su segundo período de vida todo persona quiere prestar

$$\boxed{l' = \frac{1 + Rl}{2}} \tag{2}$$

donde l es lo que la misma persona tomó en el período anterior.

• **Decisión sobre préstamos en el primer período de vida.** Los nacidos en t se enfrentan en t al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u = cc' & \\ \text{sujeto a} & c + l = 0 & \text{(restricción de joven)} \\ & c' + l' = 1 + Rl & \text{(restricción de adulto)} \end{array}$$

donde c es el consumo presente, c' es el consumo del período siguiente, l son préstamos en el período presente, l' son préstamos en el período siguiente y R es el tipo de interés del período presente. La restricción futura $c' + l' = 1 + Rl$ coincide con la restricción a la que se enfrentará la persona en su siguiente período de vida e introducida en el análisis realizado anteriormente relativa al segundo período de vida de una persona.

En este punto se plantea la duda de si, en su primer período de vida, el joven tiene presente la relación $l' = \frac{1+Rl}{2}$ obtenida en la sección anterior entre el volumen futuro l' de préstamos y el volumen presente l de préstamos. Aún obtenida en t para alguien nacido en $t-1$ la relación también parece válida en $t+1$ para alguien nacido en t (si esto es cierto, ¿por qué lo es?). La alternativa es decidir ahora l ignorando la dependencia $l' = \frac{1+Rl}{2}$ entre l' y l (¿qué podría justificar esa alternativa?).

- **Opción 1: se elige l presumiendo que l no afecta l'.** Reuniendo las dos restricciones presupuestarias se obtiene la restricción que involucra los dos primeros períodos de vida:

$$c + \frac{c'}{R} = \frac{1-l'}{R}.$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = cc' + \lambda\left(\frac{1-l'}{R} - c - \frac{c'}{R}\right).$$

Las condiciones necesarias para alcanzar un máximo de $\mathcal{L}$ son

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \frac{\lambda}{R}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1-l'}{R} - c - \frac{c'}{R}.$$

Las dos primeras condiciones implican

$$c = \frac{c'}{R}.$$

Usando esta ecuación en la tercera condición

$$c = \frac{1-l'}{2R}.$$

Dado que $c + l = 0$, se concluye que $l = -c$; esto es,

$$\boxed{l = \frac{l'-1}{2R}.} \tag{3}$$

Despejando l' en (3)

$$l' = 2Rl + 1\,.$$

Empleando (2) , $2Rl + 1 = l' = \frac{1+Rl}{2}$. De aquí

$$Rl = -\frac{1}{3}.$$

Dado $c' = \frac{1+Rl}{2}$, se sigue que

$$\boxed{c' = \frac{1}{3}.}$$

Por otra parte, recordando que $l' = 2Rl + 1$ (o que $l' = c'$), se concluye que

$$l' = \frac{1}{3}.$$

Y como $c'' = R'l'$,

$$\boxed{c'' = \frac{R'}{3}.}$$

Además,

$$c = \frac{1 - l'}{2R}.$$

implica

$$\boxed{c = \frac{1}{3R}.}$$

Si se interpreta que el mercado de préstamos es idéntico cada período, se concluye que $R = R'$. Por último, existe la condición de factibilidad: dado que el bien no puede acumularse entre períodos, el consumo total

$$n \cdot c + n \cdot c' + n \cdot c''$$

en un período debe coincidir con la cantidad total $n \cdot 1$ existente en el período. En resumen, es necesario que

$$c + c' + c'' = 1\,.$$

Así pues,

$$\frac{1}{3 \cdot R} + \frac{1}{3} + \frac{R}{3} = 1$$

o, equivalentemente,

$$R^2 - 2R + 1 = 0\,.$$

De ambas soluciones, $R = -1$ no es aceptable como tipo de interés de equilibrio (¿por qué motivo?). Esto lleva a

$$\boxed{R = 1}$$

y, en consecuencia, a

$$c = c' = c'' = \frac{1}{3}.$$

• **Opción 2: se elige l presumiendo que l afecta l' según la relación $l' = \frac{1+Rl}{2}$.** En las restricciones presupuestarias

$$c + l = 0$$

$$c' + l' = 1 + Rl$$

se añade

$$l' = \frac{1 + Rl}{2}.$$

Insertando la tercera ecuación en la segunda,

$$c' + \frac{1 + Rl}{2} = 1 + Rl\,.$$

Equivalentemente,

$$c' = \frac{1 + Rl}{2}.$$

De la primera ecuación, $l = -c$. Introduciendo esta condición en la ecuación anterior,

$$c' = \frac{1 - Rc}{2}$$

o

$$\frac{Rc}{2} + c' = \frac{1}{2}.$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = cc' + \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{Rc}{2} - c'\right).$$

Las condiciones necesarias para alcanzar un máximo de $\mathcal{L}$ son

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \frac{R\lambda}{2}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} - \frac{Rc}{2} - c'\,.$$

Las dos primeras condiciones implican

$$c' = \frac{Rc}{2}.$$

Usando este resultado y la tercera condición

$$\boxed{c' = \frac{1}{4}\,.}$$

Sabiendo que $c' = \frac{1+Rl}{2}$,

$$Rl = -\frac{1}{2}\,.$$

Partiendo de $c = -l$ y el anterior resultado, se llega a

$$\boxed{c = \frac{1}{2R}\,.}$$

De $l' = \frac{1+Rl}{2}$ y $Rl = -\frac{1}{2}$ dedúcese

$$l' = \frac{1}{4}\,.$$

Por último, $c'' = R'l'$, la presunción que $R' = R$ y el resultado anterior implican

$$\boxed{c'' = \frac{R}{4}\,.}$$

Sigue siendo válida la condición

$$c + c' + c'' = 1\,.$$

Como consecuencia,

$$\frac{1}{2R} + \frac{1}{4} + \frac{R}{4} = 1\,,$$

que equivale a

$$R^2 - 3R + 2 = 0\,.$$

Ambas soluciones de la ecuación anterior son admisibles:

$$\boxed{R = 1} \quad \text{y} \quad \boxed{R = 2.}$$

Con $R = 1$,

$$\boxed{c = \frac{1}{2} \;\text{ y }\; c' = c'' = \frac{1}{4}\,.}$$

Con $R = 2$,

$$\boxed{c = c' = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad c'' = \frac{1}{2}\,.}$$