12. Cuatro períodos

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período t nacen n personas.

• Cada persona vive cuatro períodos consecutivos.

• La utilidad en el último período es el consumo del período. La utilidad en un período previo es $u = c \cdot c'$, donde c es el consumo en el período corriente y c' el consumo en el período siguiente.

• La dotación de bien de cada persona es $(0, 1, 0, 1)$.

2. Análisis

En el período inicial $t = 1$ no hay mercado de préstamos, de donde se sigue que no hay ningún intercambio. Sea una persona nacida en $t \geq 2$.

• **Primer período de vida.** Si t es el primer período de vida se trata de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_t^1 = c_t^1 c_{t+1}^2 \ \text{ respecto de } c_t^1 \text{ y } l_t^1 \\ \text{sujeto a} & c_t^1 + l_t^1 = 0 \\ & c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t l_t^1 \end{array}$$

donde el superíndice indica período de vida y el subíndice período de la economía (por ejemplo, l_{t+1}^2 son los préstamos en $t+1$ de alguien que en $t+1$ vive su segundo período de vida).

El problema equivale a

$$\text{maximizar} \ \ u_t^1 = -l_t^1(1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \ \text{ respecto de } l_t^1.$$

Para resolver este problema primero es necesario determinar l_{t+1}^2 y esta determinación se produce en el segundo período de vida.

• **Segundo período de vida.** Si $t+1$ es el segundo período de vida se trata de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_{t+1}^2 = c_{t+1}^2 c_{t+2}^3 \ \text{ respecto de } c_{t+1}^2 \text{ y } l_{t+1}^2 \\ \text{sujeto a} & c_{t+1}^2 + l_{t+1}^2 = 1 + R_t l_t^1 \\ & c_{t+2}^3 + l_{t+2}^3 = R_{t+1} l_{t+1}^2. \end{array}$$

Simplificado es un problema de

$$\text{maximizar} \ \ u_{t+1}^2 = (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2)(R_{t+1} l_{t+1}^2 - l_{t+2}^3) \ \text{ respecto de } l_{t+1}^2.$$

Para resolver este problema primero es necesario determinar l_{t+2}^3y esta determinación se produce en el tercer período de vida.

• **Tercer período de vida.** Si $t+2$ es el tercer período de vida se trata de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \;\; u_{t+2}^3 = c_{t+2}^3 c_{t+3}^4 \;\; \text{respecto de } c_{t+2}^3 \text{ y } l_{t+2}^3 \\ &\text{sujeto a} \qquad c_{t+2}^3 + l_{t+2}^3 = R_{t+1} l_{t+1}^2 \\ &\qquad\qquad\quad\;\; c_{t+3}^4 = 1 + R_{t+2} l_{t+2}^3. \end{aligned}$$

Este problema consiste en

$$\text{maximizar} \;\; u_{t+2}^3 = (R_{t+1} l_{t+1}^2 - l_{t+2}^3)(1 + R_{t+2} l_{t+2}^3) \;\; \text{respecto de } l_{t+2}^3.$$

Este problema ya se puede resolver porque en el cuarto (último) período de vida se trata de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \;\; u_{t+3}^4 = c_{t+3}^4 \\ &\text{sujeto a} \qquad c_{t+3}^4 = 1 + R_{t+2} l_{t+2}^3 \end{aligned}$$

y resulta que ya está todo decidido previamente; en particular, el consumo c_{t+3}^4 en el cuarto período está completamente determinado: la dotación 1 y el rendimiento $R_{t+2} l_{t+2}^3$ de los préstamos del período anterior.

La solución en el tercer período se obtiene de la condición

$$0 = \frac{du_{t+2}^3}{dl_{t+2}^3} = R_{t+1} R_{t+2} l_{t+1}^2 - 1 - 2R_{t+2} l_{t+2}^3$$

o

$$l_{t+2}^3 = \frac{R_{t+1} R_{t+2} l_{t+1}^2 - 1}{2R_{t+2}} = \frac{R_{t+1} l_{t+1}^2}{2} - \frac{1}{2R_{t+2}}. \qquad (1)$$

Esta solución se introduce en el problema del segundo período, que se transforma en

$$\text{maximizar } u_{t+1}^2 = (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \cdot \left(R_{t+1} l_{t+1}^2 - \left(\frac{R_{t+1} l_{t+1}^2}{2} - \frac{1}{2R_{t+2}} \right) \right) \text{ respecto de } l_{t+1}^2.$$

o

$$\text{maximizar } u_{t+1}^2 = (1 + R_t l_t^1 - l_{t+1}^2) \frac{1}{2} \left(R_{t+1} l_{t+1}^2 + \frac{1}{R_{t+2}} \right) \text{ respecto de } l_{t+1}^2.$$

La solución en el segundo período se obtiene de la condición

$$0 = \frac{du_{t+1}^2}{dl_{t+1}^2} = \frac{1}{2} \left(R_{t+1} (1 + R_t l_t^1 - 2l_{t+1}^2) - \frac{1}{R_{t+2}} \right)$$

o

$$l_{t+1}^2 = \frac{1 + R_t l_t^1}{2} - \frac{1}{2R_{t+1} R_{t+2}}. \qquad (2)$$

Esta solución se introduce en el problema del primer período, que pasa a ser

$$\text{maximizar } u_t^1 = -l_t^1\left(1 + R_t l_t^1 - \left(\frac{1+R_t l_t^1}{2} - \frac{1}{2R_{t+1}R_{t+2}}\right)\right) \text{ respecto de } l_t^1$$

o

$$\text{maximizar } u_t^1 = -l_t^1\,\frac{1}{2}\left(1 + R_t l_t^1 + \frac{1}{R_{t+1}R_{t+2}}\right) \text{ respecto de } l_t^1.$$

La solución en el primer período se obtiene de la condición

$$0 = \frac{du_t^1}{dl_t^1} = -\frac{1}{2}\left(1 + 2R_t l_t^1 - \frac{1}{R_{t+1}R_{t+2}}\right)$$

o

$$l_t^1 = -\frac{1}{2R_t} - \frac{1}{2R_t R_{t+1} R_{t+2}}. \tag{3}$$

• **Equilibrio en el mercado de préstamos.** En el primer período de la economía, $t = 1$, no hay mercado de préstamos. En $t = 2$ hay mercado de préstamos donde sólo participan los que tienen un período de vida y los que tienen dos (se deja como ejercicio resolver este caso). Para $t \geq 3$ hay mercado de préstamos en el que participan los que están viviendo su primer, segundo o tercer período de vida.

Primeramente, la participación de los que en t están en su primer período de vida viene dictada por la función (3):

$$l_t^1 = -\frac{1}{2R_t} - \frac{1}{2R_t R_{t+1} R_{t+2}}$$

En segundo lugar, la participación de los que en t están en su segundo período de vida viene dictada por la función (2), formulada para alguien que en t esté viviendo su segundo período de vida:

$$l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1} l_{t-1}^1}{2} - \frac{1}{2R_t R_{t+1}}.$$

Para $t \geq 4$ es válida la ecuación (3) desfasada un período:

$$l_{t-1}^1 = -\frac{1}{2R_{t-1}} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t R_{t+1}}.$$

Combinando las dos últimas ecuaciones,

$$l_t^2 = \frac{1 + R_{t-1}\left(-\frac{1}{2R_{t-1}} - \frac{1}{2R_{t-1}R_t R_{t+1}}\right)}{2} - \frac{1}{2R_t R_{t+1}}$$

o

$$l_t^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4R_t R_{t+1}} - \frac{1}{2R_t R_{t+1}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4R_t R_{t+1}}.$$

Finalmente la participación de los que en t están en su tercer período de vida viene dictada por la función (1), formulada para alguien que en t esté viviendo su tercer período de vida:

$$l_t^3 = \frac{R_{t-1} l_{t-1}^2}{2} - \frac{1}{2R_t}.$$

Para $t \geq 5$ es válida la ecuación (2) desfasada dos períodos:

$$l_{t-1}^2 = \frac{1 + R_{t-2} l_{t-2}^1}{2} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t}.$$

Para $t \geq 5$ es válida la ecuación (3) desfasada dos períodos:

$$l_{t-2}^1 = -\frac{1}{2R_{t-2}} - \frac{1}{2R_{t-2} R_{t-1} R_t}.$$

Combinando las tres últimas ecuaciones,

$$l_t^3 = \frac{R_{t-1}\left(\frac{1 + R_{t-2} l_{t-2}^1}{2} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_t} =$$

$$= \frac{R_{t-1}\left(\frac{1 + R_{t-2}\left(-\frac{1}{2R_{t-2}} - \frac{1}{2R_{t-2} R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_t} =$$

$$= \frac{R_{t-1}\left(\frac{1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_t} =$$

$$= \frac{R_{t-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4R_{t-1} R_t} - \frac{1}{2R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_t} = \frac{R_{t-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4R_{t-1} R_t}\right)}{2} - \frac{1}{2R_t} =$$

$$\frac{R_{t-1}}{8} - \frac{3}{8R_t} - \frac{1}{2R_t} = \frac{R_{t-1}}{8} - \frac{7}{8R_t}.$$

En resumen, en $t \geq 5$, la condición de equilibrio en el mercado de préstamos es

$$n \cdot l_t^1 + n \cdot l_t^2 + n \cdot l_t^3 = 0$$

o

$$l_t^1 + l_t^2 + l_t^3 = 0$$

o

$$\left(-\frac{1}{2R_t} - \frac{1}{2R_t R_{t+1} R_{t+2}}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4R_t R_{t+1}}\right) + \left(\frac{R_{t-1}}{8} - \frac{7}{8R_t}\right) = 0\,.$$

Se trata de una ecuación en diferencias de 4º orden, donde el tipo de interés en t depende del tipo de interés del período anterior y del tipo de los dos períodos siguientes (la presunción en todos los cálculos anteriores es que se tiene previsión perfecta: las tasas del futuro son correctamente anticipadas). Si se toma la perspectiva de $t+2$, entonces el tipo en $t+2$ depende del tipo en los tres períodos anteriores, $t+1$, t y $t-1$.

Solucionar explícitamente este tipo de ecuación no es trivial (y tampoco existe una teoría general sobre sus soluciones). Por fortuna, el interés en el modelo radica en la identificación de los estados estacionarios, que pasa por igualar los tipos de todos los períodos. Sea $R = R_{t-1} = R_t = R_{t+1} = R_{t+2}$. En este caso, la ecuación anterior se transforma en

$$\left(-\frac{1}{2R}-\frac{1}{2R^3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4R^2}\right)+\left(\frac{R}{8}-\frac{7}{8R}\right)=0$$

o, multiplicando por $8R^3$,

$$(-4R^2-4)+(2R^3-6R)+(R^4-7R^2)=0$$

o

$$R^4+2R^3-11R^2-6R-4=0$$

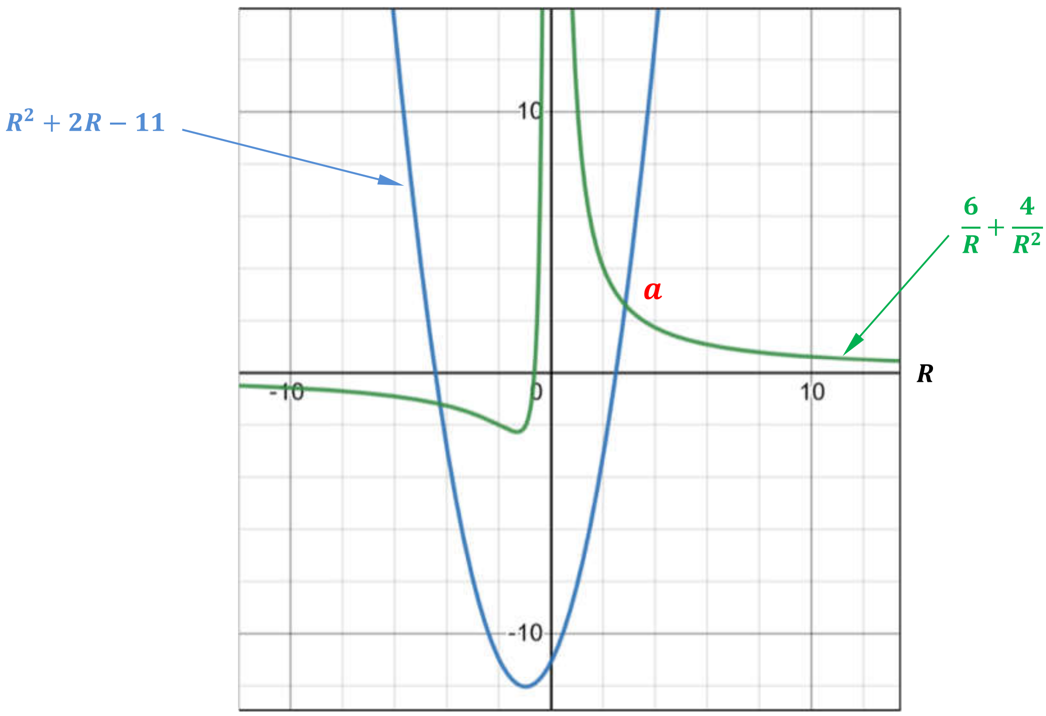
o

$$R^2(R^2+2R-11)=6R+4$$

o

$$R^2+2R-11=\frac{6}{R}+\frac{4}{R^2}.$$

Con esta formulación se puede identificar gráficamente la existencia de una solución única. La parte izquierda $\boldsymbol{R^2+2R-11}$ define una parábola; la parte derecha, $\boldsymbol{\frac{6}{R}+\frac{4}{R^2}}$, una hipérbola. La gráfica a continuación (tomada de https://www.transum.org/Maths/Activity/Graph/Desmos.asp) muestra que existe una única intersección (el punto $\boldsymbol{a}$) para valores positivos del tipo de interés.



El valor sobre el eje de abscisas del punto de intersección identifica el tipo de interés de estado estacionario. La gráfica sugiere que el tipo de interés de estado estacionario es algo superior a 2,8.