15. Modelo 2: Deuda pública en una sociedad homogénea

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen n personas idénticas que viven dos períodos consecutivos.

• Toda persona sólo tiene dotación del bien en su primer período de vida: una unidad del bien.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es $c$el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Hay un actor económico inmortal: un gobierno. Cada período, desde $t = 1$, el gobierno emite bonos. Un bono es un título de deuda que, a cambio de pagar un precio de p unidades del bien en el período t, promete pagar una unidad de bien en el siguiente período $t + 1$. Nadie duda que el gobierno pagará su deuda. El gobierno dilapida los ingresos de la primera emisión de bonos y el pago de la deuda cada período se hace emitiendo más bonos: la deuda pública se refinancia con más deuda.

2. Decisiones

• **Mercado de préstamos privados.** Con todo el mundo idéntico no hay mercado de préstamos privados, dado que todos querrán hacer lo mismo: o todo el mundo quiere prestar (no hay demanda de préstamos) o todo el mundo quiere tomar prestado (y no hay oferta de préstamos).

• **Mercado de préstamos públicos.** En esta economía nadie puede ahorrar por sí mismo (porque el bien no es acumulable) ni por medio de otros (porque no hay mercado de préstamos privados). El gobierno (con la emisión de deuda) actúa de intermediario entre una persona joven y la misma persona mayor, y así hace posible el ahorro.

• **Decisión de comprar bonos.** Cada joven se enfrenta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = cc' \\ \text{sujeto a} & c + pb = 1 \\ & c' = b \end{array}$$

donde

- c es el consumo presente (de joven),
- c' es el consumo del período siguiente (de grande),
- b es la cantidad de bonos que el joven pretende adquirir y
- p es el precio de un bono en unidades de bien.

La hipótesis de que cada bono comprado en t paga una unidad de bien en $t+1$, implica que el símbolo b tenga interpretaciones (y unidades de medida) diferentes en función del período de tiempo en que se considere. En concreto, si b es la cantidad de bonos que se compran o emiten en un período t, entonces b representa también la cantidad de bien que el gobierno debe pagar en $t+1$. En t, b son bonos mientras que, en $t+1$, el mismo valor b son bienes.

Por este motivo, la compra de b bonos de joven (restricción de joven $c+pb=1$) implica ingresar b unidades de bien de mayor (restricción de mayor $c'=b$): cada bono comprado en t se transforma en una unidad del bien en $t+1$.

El bono transforma su precio p (en t) en 1 (en $t+1$). El tipo bruto de interés del bono es $1/p$: se obtiene una unidad mañana empleando p unidades hoy.

Tras insertar las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar } \ u=(1-pb)b \ \text{ respecto de } b.$$

La solución a estes problema es la función de demanda de bonos de un joven

$$\boxed{b=\frac{1}{2p}.}$$

No es sorpresa que, cuanto mayor el precio p de los bonos, menor su demanda b.

3. Mercados

• **Condición de equilibrio en el mercado de bonos.** Designando por B la cantidad total de bonos que el gobierno emite en el período t que se considere, el equilibrio en el mercado de bonos resulta de la igualdad entre la oferta B de bonos y la demanda total nb de bonos. Por tanto,

$$B=nb\,. \tag{1}$$

• **Condición de equilibrio presupuestario del gobierno (desde $t=2$).** El gobierno alcanza el equilibrio presupuestario si se igualan sus ingresos y sus gastos. Los ingresos coinciden con la recaudación npb derivada de la emisión de bonos: n jóvenes compran b bonos cada uno y pagan p unidades de bien por bono. Los gastos se reducen a pagar la deuda generada por los bonos emitidos en el período anterior. Haber emitido B_{-1} bonos en el período anterior significa tener que pagar B_{-1} unidades del bien en el período presente. En resumen, la condición de equilibrio presupuestario es

$$B_{-1}=npb\,. \tag{2}$$

• **Cálculo del precio de los bonos.** Multiplicando por p los dos lados de (1), $pB=pnb$. Combinando esta ecuación con (2),

$$B_{-1}=pB\,. \tag{3}$$

La condición (3) dice que la deuda heredada del período anterior se paga con el valor de las nuevas emisiones de deuda (de bonos).

De (2) y la demanda de bonos $b = 1/2p$ se sigue que

$$B_{-1} = npb = np\frac{1}{2p} = \frac{n}{2}.$$

Dado que el mismo argumento valdría para el siguiente período (donde B reemplazaría a B_{-1}), se concluye que

$$B = \frac{n}{2}.$$

Empleando (3) sabiendo que $B = B_{-1}$, se deduce que

$$\boxed{p = 1\,.}$$

• **Cálculo de la asignación de equilibrio.** Con $p = 1$, $b = 1/2p = 1/2$. Por la restricción de joven, $c = 1 - b = 1/2$. Por la restricción de mayor, $c' = b = 1/2$.

• **Eficiencia de la asignación de equilibrio.** La asignación de equilibrio $(c, c') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es Paretoeficiente. Si una persona fuera libre de distribuir su consumo, elegiría el par (c, c') que soluciona

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && u = cc' \\ &\text{sujeto a} && c + c' = 1\,. \end{aligned}$$

Esa solución sería Paretoeficiente. Si se calcula, se observará que coincide con la de equilibrio.

4. Variante 1: los bonos financian una pensión de τ unidades de bien pagada a cada mayor

• **Pensión.** En esta variante se mantiene el mercado de deuda pública pero ahora esta deuda tiene como finalidad financiar una pensión de τ unidades del bien pagada cada período a toda persona mayor. Se deja como ejercicio analizar el caso en el que los mayores no saben que van a recibir la pensión. A continuación se considera el caso en el que se sabe que se recibirá la pensión de mayor.

• **Función de demanda de bonos.** Todo joven se enfrenta al problema de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && u = cc' \\ &\text{sujeto a} && c + pb = 1 \\ & && c' = b + \tau. \end{aligned}$$

Tras incorporar las dos retricciones en la función objetivo, el problema se convierte en uno de

$$\text{maximizar } \; u = (1 - pb)(b + \tau) \; \text{ respecto de } b.$$

La función de demanda de bonos resultante es

$$\boxed{b = \frac{1 - \tau p}{2p} = \frac{1}{2p} - \frac{\tau}{2}\,.} \tag{4}$$

La demanda de bonos de un joven depende negativamente tanto del precio de los bonos como de la pensión. Parece razonable que cuanto más bien se tiene de mayor, menor necesidad de ahorrar de joven comprando bonos.

• **Condición de equilibrio en el mercado de bonos.** Designando por <u>B la cantidad total de bonos que el gobierno emite</u> en el período t que se considere, el equilibrio en el mercado de bonos resulta de la igualdad entre la oferta B de bonos y la demanda total nb de bonos. En consecuencia,

$$B = nb\,. \tag{5}$$

• **Condición de equilibrio presupuestario del gobierno (desde $t = 2$).** Equilibrio presupuestario significa igualdad de ingresos y gastos del gobierno. Cada período, el ingreso es la recaudación npb por la emisión de bonos. Los gastos de cada período tienen dos componentes: el pago $n\tau$ de pensiones y el pago de la deuda B_{-1} generada en el período anterior. La condición de equilibrio presupuestario es

$$B_{-1} + n\tau = npb\,. \tag{6}$$

• **Determinación de la dinámica de acumulación de deuda.** Multiplicando por p los dos lados de (5), $pB = pnb$. Combinando esta ecuación con (6),

$$B_{-1} + n\tau = pB\,. \tag{7}$$

La expresión (7) indica que la deuda creada en el período anterior más las pensiones del período presente se pagan con el valor de las nuevas emisiones de bonos.

De (6) y la función de demanda de bonos (4) se sigue que

$$B_{-1} + n\tau = np\frac{1 - \tau p}{2p}$$

o, equivalentemente,

$$B_{-1} = \frac{n}{2}\big(1 - \tau(2 + p)\big)\,.$$

Despejando p,

$$p = \frac{n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}}{n\tau}\,. \tag{8}$$

La condición (7) hace que

$$B = \frac{1}{p}(B_{-1} + n\tau)\,.$$

Insertando (8),

$$\boxed{B = \frac{n\tau(B_{-1} + n\tau)}{n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}}\,.} \tag{9}$$

La expresión (9) traza la dinámica de acumulación de deuda pública. La primera derivada es

$$\frac{dB}{dB_{-1}} = \frac{n\tau(n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}) + 2n\tau(B_{-1} + n\tau)}{(n(1 - 2\tau) - 2B_{-1})^2} = \frac{n^2\tau}{(n(1 - 2\tau) - 2B_{-1})^2}$$

que siempre toma un valor positivo.

Conclusión: la función (9) es creciente. Esto es, cuanto mayor B_{-1}, mayor B: un incremento de la deuda pasada B_{-1} se traduce en un aumento de la deuda futura B y una reducción B_{-1} conlleva una disminución de B. Por el doble significado de B, sugiere que cuando mayor la deuda heredada B_{-1}, mayor la cantidad B de bonos a emitir en el futuro.

La segunda derivada de (9) es

$$\frac{d^2B}{dB_{-1}{}^2} = \frac{4n^2\tau(n(1 - 2\tau) - 2B_{-1})}{(n(1 - 2\tau) - 2B_{-1})^4} = \frac{4n^2\tau}{(n(1 - 2\tau) - 2B_{-1})^3}\,.$$

La función (9) tiene sentido para valores no negativos de B. Esto implica que el denominador $n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}$ no puede ser negativo. Como consecuencia,

$$B_{-1} < \frac{n}{2}(1 - 2\tau)\,.$$

Esta desigualdad establece un límite de endeudamiento público y también un límite del valor de la pensión ($\tau < 1/2$). Otra implicación es que el signo de la segunda derivada es positivo y, por ello, la función (9) es convexa.

La Fig. 1 representa la función (9) con la presunción de que $B_{-1} < n(1 - 2\tau)/2$. La curva no pasa por el origen porque $B_{-1} = 0$ implica, asumiendo $\tau < 1/2$, que $B = n\tau^2/(1 - 2\tau) > 0$. Si la deuda inicialmente toma el valor B_0, (9) establece el siguiente valor B_1 (que será inferior a B_0), y el siguiente valor B_2 (que será inferior a B_1) y así sucesivamente.

La representación gráfica sugiere que este proceso de emisión de bonos y de acumulación de deuda (hay que recordar que B es en un período bonos y en el siguiente bienes) converge a alguno de los dos valores $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ donde intersectan la curva y la diagonal principal. Los valores $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ representan estados estacionarios de la trayectoria de acumulación de deuda definida por (9).

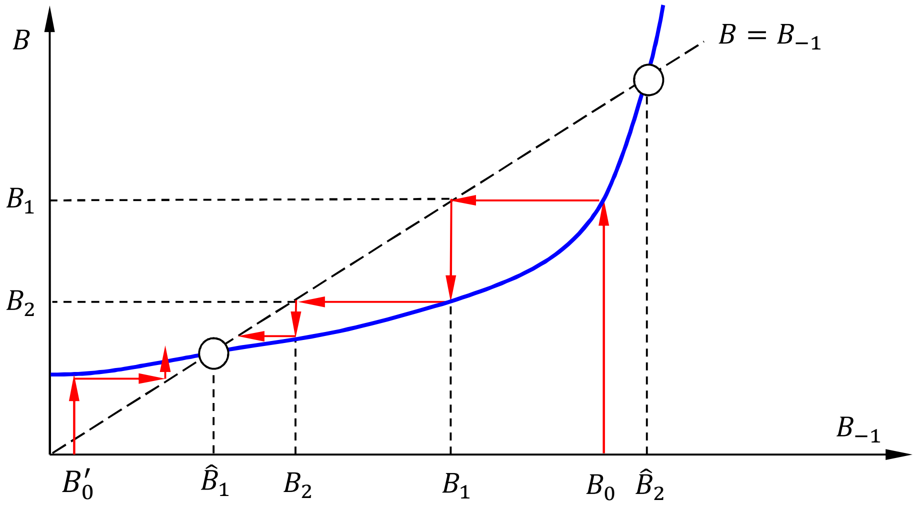

Fig. 1. Dinámica de la deuda pública y estados estacionarios de la dinámica

En la Fig. 1, si el valor inicial es B_0, se convergería a $\hat{B}_1$. También se convergería a $\hat{B}_1$ si el valor inicial fuera inferior a $\hat{B}_1$ (como B'_0). Se deja como ejercicio verificar que si el valor inicial de la deuda es superior a $\hat{B}_2$ no hay convergencia: la deuda crece exponencialmente.

Por tanto, <u>$\hat{B}_2$ representa un estado estacionario inestable, mientras que $\hat{B}_1$ representa uno estable</u>: partiendo de valores de deuda próximos a $\hat{B}_1$, la dinámica (9) devuelve la deuda al valor $\hat{B}_1$.

Los estados estacionarios $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ de la deuda pública (o, en la interpretación alternativa, de la emisión de bonos) se corresponden con puntos donde se cruzan la función (9) y la diagonal principal $B = B_{-1}$. Esta diagonal expresa la condición de estacionariedad: que el valor de la deuda se mantenga constante. Por todo ello, $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ serían las soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$B = \frac{n\tau(B_{-1} + n\tau)}{n(1 - 2\tau) - 2B_{-1}}$$

$$B = B_{-1}\,.$$

Combinando las ecuaciones y definiendo $\hat{B} = B = B_{-1}$,

$$2\hat{B}^2 + \hat{B}n(3\tau - 1) + n^2\tau^2 = 0\,.$$

Haciendo los cálculos, $\hat{B}_1$ y $\hat{B}_2$ son los dos valores que admite la fórmula

$$\hat{B} = \frac{n}{4}\left(1 - 3\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 6\tau + 1}\right).$$

5. Variante 2: pensión de τ unidades pagada a cada mayor financiada con bonos e impuestos

• **Impuestos.** En esta variante se mantiene el mercado de deuda pública. La deuda tiene como finalidad financiar una pensión de τ unidades del bien pagada cada período a toda persona mayor. Además, los jóvenes deben contribuir mediante impuestos a la financiación de la pensión.

En particular, se asume que los jóvenes deben pagar la misma cantidad $\tau < 1$ de bien que el gobierno les devolverá de mayores en forma de pensión. Como en la variante 1, se sabe que se recibirá la pensión de mayor.

• **Función de demanda de bonos.** Todo joven tiene como objetivo

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = cc' \ \text{ respecto de } c,\, c' \text{ y } b \\ \text{sujeto a} & c + pb + \tau = 1 \\ & c' = b + \tau. \end{array}$$

Este objetivo equivale a

$$\text{maximizar } \ u = (1 - pb - \tau)(b + \tau) \quad \text{respecto de } b.$$

El resultado:

$$b = \frac{1 - \tau(1+p)}{2p} = \frac{1-\tau}{2p} - \frac{\tau}{2}.$$

La demanda de bonos depende negativamente del precio de los bonos y del impuesto-pensión:

$$\frac{db}{dp} = \frac{\tau - 1}{4p^2} < 0$$

$$\frac{db}{d\tau} = -\frac{1+p}{2p} < 0.$$

• **Condición de equilibrio en el mercado de bonos.** En cada período, el equilibrio en el mercado de bonos resulta de la igualdad entre la oferta B de bonos y la demanda total nb de bonos:

$$B = nb = n\frac{1 - \tau(1+p)}{2p}.$$

• **Condición de equilibrio presupuestario del gobierno.** En todo período, el gobierno ingresa de los jóvenes, como impuesto, la cantidad de bien $n\tau$ y, también de los jóvenes, obtiene la cantidad de bien npb (n jóvenes pagan el precio p por cada uno de los b bonos comprados).

Por otro lado, en todo período, el gobierno paga a los mayores, como pensión, la cantidad de bien $n\tau$ y, también a los mayores, paga la deuda B_{-1}.

El período inicial $t = 1$ es especial, ya que no hay deuda ni mayores. La hipótesis es que el gobierno emite bonos y utiliza en provecho propio tanto la recaudación impositiva como los ingresos por la emisión de bonos. Resumiendo, para todo período $t \geq 2$, se cumple

$$\text{gastos del gobierno} = \text{ingresos del gobierno}$$

$$n\tau + B_{-1} = n\tau + npb$$

$$B_{-1} = npb$$

$$B_{-1} = np\left(\frac{1-\tau(1+p)}{2p}\right) = \frac{n}{2}\big(1-\tau(1+p)\big)$$

$$p = \frac{n(1-\tau) - 2B_{-1}}{n\tau}.$$

• **Determinación de la dinámica de acumulación de deuda.** Introduciendo la ecuación anterior en la condición de equilibrio $B_{-1} = pB$ en el mercado de bonos, resulta

$$\boxed{B = \frac{n\tau B_{-1}}{n(1-\tau) - 2B_{-1}}}$$

que es la trayectoria de acumulación de la deuda pública (o la regla que establece la oferta de bonos en un período a partir de la oferta del período anterior). Presumir el denominador positivo, exige

$$B_{-1} < \frac{n(1-\tau)}{2}.$$

Dado que $\tau < 1$ (y que $n(1-\tau) > 2B_{-1}$),

$$\frac{dB}{dB_{-1}} = \frac{n\tau(n(1-\tau) - 2B_{-1}) + 2n\tau B_{-1}}{(n(1-\tau) - 2B_{-1})^2} = \frac{n^2\tau(1-\tau)}{(n(1-\tau) - 2B_{-1})^2} > 0$$

y

$$\frac{d^2B}{dB_{-1}{}^2} = \frac{2n^2\tau(1-\tau)}{(n(1-2\tau) - 2B_{-1})^3} > 0.$$

La representación gráfica de la trayectoria de la deuda es similar a la de la Fig. 1, con la diferencia que la curva pasa por el origen (puesto que $B_{-1} = 0$ implica $B = 0$).

De la condición

$$\bar{B} = \frac{n\tau\bar{B}}{n(1-\tau) - 2\bar{B}}$$

se obtienen los (dos) valores de estado estacionario de la deuda. Uno es positivo; el otro, cero. Sólo el segundo es estable. Así que, a la larga, la deuda pública se enjuga.

• **Ejercicio**. ¿Y si el impuesto que paga todo joven (sea τ) es diferente de la pensión (sea τ') que recibe todo mayor?