16. Modelo 2: Deuda pública en una sociedad heterogénea

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Toda persona vive dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde c es el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0): una unidad de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2, 2): dos unidades de joven y dos de mayor.

• No existe mercado de préstamos privado.

• Hay un agente inmortal: un gobierno. Cada período, desde $t = 1$, el gobierno emite bonos. Cada bono es un título de deuda que, comprado en el período t a un precio de p unidades de bien, promete pagar una unidad de bien en el siguiente período $t + 1$. Se cree que el gobierno pagará su deuda. El gobierno dilapida los ingresos de la primera emisión de bonos y el pago de la deuda cada período se hace emitiendo bonos: la deuda pública se refinancia con más deuda.

2. Decisiones

• **Decisión de comprar bonos de los jóvenes de G1.** Cada joven de G1 se enfrenta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_1 = c_1 c_1' \quad \text{con respecto a } c_1,\ c_1' \text{ y } b_1 \\ \text{sujeto a} & c_1 + p b_1 = 1 \\ & c_1' = b_1 \end{array}$$

donde

- c_1 es el consumo de joven,
- c_1' es el consumo de mayor,
- b_1 es la cantidad de bonos que el joven pretende adquirir y
- p es el precio de un bono en unidades de bien.

Insertado ambas retricciones en la función objetivo el problema se transforma en uno de

$$\text{maximizar} \quad u_1 = (1 - p b_1) b_1 \text{ con respecto a } b_1$$

y la función de demanda de bonos resultante es

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2p}.}$$

• **Decisión de comprar bonos de los jóvenes de G2.** Cada joven de G2 se enfrenta al problema de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad u_2 = c_2 c_2' \quad \text{con respecto a } c_2,\ c_2' \text{ y } b_2 \\ &\text{sujeto a} \qquad c_2 + p b_2 = 2 \\ &\qquad\qquad\qquad c_2' = 2 + b_2 \end{aligned}$$

donde

- c_2 es el consumo de joven,
- c_2' es el consumo de mayor,
- b_2 es la cantidad de bonos que el joven pretende adquirir y
- p es el precio de un bono en unidades de bien.

Insertado ambas retricciones en la función objetivo el problema se transforma en uno de

$$\text{maximizar} \quad u_2 = (2 - p b_2)(2 + b_2) \text{ con respecto a } b_2$$

y la función de demanda de bonos resultante es

$$\boxed{b_2 = \frac{1-p}{p}.}$$

3. Mercados

• **Condición de equilibrio en el mercado de bonos.** Designando por B la cantidad total de bonos que el gobierno emite en el período t que se considere, el equilibrio en el mercado de bonos resulta de la igualdad entre la oferta B de bonos y la demanda total $nb_1 + nb_2$ de bonos. Por tanto,

$$B = nb_1 + nb_2\,. \tag{1}$$

• **Condición de equilibrio presupuestario del gobierno (desde $t = 2$).** Existe equilibrio presupuestario cuando se igualan ingresos y gastos del gobierno. Los ingresos de todo período coinciden con la recaudación $npb_1 + npb_2$ por la emisión de bonos: n jóvenes de G1 compran b_1 bonos y pagan p unidades de bien por bono; y n jóvenes de G2 compran b_2 bonos y también pagan p unidades de bien por bono. Los gastos del período se reducen al pago de la deuda generada por los bonos emitidos en el período anterior. Emitir B_{-1} bonos en el período anterior significa tener que pagar B_{-1} unidades del bien en el período presente. En resumen, la condición de equilibrio presupuestario es

$$B_{-1} = npb_1 + npb_2\,. \tag{2}$$

• **Cálculo del precio de los bonos.** Multiplicando por p los dos lados de la ecuación (1), $pB = pnb_1 + pnb_2$. Combinando esta ecuación con (2),

$$B_{-1} = pB\,. \tag{3}$$

La condición (3) dice que la deuda arrastrada del período anterior se paga con más deuda (nueva emisión de bonos). Esta condición expresará la trayectoria de acumulación de la deuda una vez se haya introducido la fórmula que especifica el valor de p en función de los parámetros del modelo. Con este objetivo, se trata de encontrar la fórmula de p a partir de (2) y después sustituir p en (3).

De (2) y las funciones de demanda de bonos $b_1 = \frac{1}{2p}$ y $b_2 = \frac{1-p}{p}$ se sigue que

$$B_{-1} = np\frac{1}{2p} + np\frac{1-p}{p} = n\left(\frac{3}{2} - p\right).$$

Despejando p se obtiene la fórmula que expresa p en términos de parámetros:

$$\boxed{p = \frac{3}{2} - \frac{B_{-1}}{n}.}$$

• **Dinámica de la deuda pública.** Si la ecuación anterior se introduce en (3) y se aísla B, se obtiene la expresión de la trayectoria de acumulación de la deuda pública:

$$\boxed{B = \frac{2nB_{-1}}{3n - 2B_{-1}}.} \tag{4}$$

• **Obtención de los estados estacionarios de la trayectoria de acumulación de la deuda pública.** La Fig. 1 representa gráficamente (4) en el dominio $0 \leq B_{t-1} < \frac{3n}{2}$.

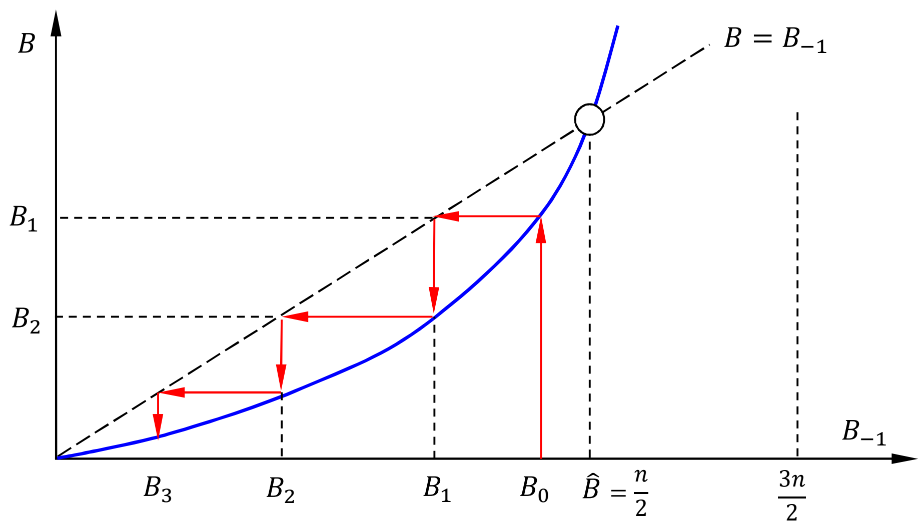

Fig. 1. Dinámica de la deuda pública y estados estacionarios de la dinámica

La función (4) es creciente y convexa si $B_{t-1} < 3n/2$, ya que la primera derivada

$$\frac{dB_t}{dB_{t-1}} = \frac{6n^2}{(3n - 2B_{t-1})^2}$$

toma siempre un valor positivo y la segunda derivada

$$\frac{d^2B_t}{dB_{t-1}{}^2} = \frac{24n^2}{(3n - 2B_{t-1})^3}$$

toma un valor positivo si $B_{t-1} < \frac{3n}{2}$ (esta desigualdad es una especie de restricción de la deuda per cápita: $\frac{B_{t-1}}{2n} < \frac{3}{4}$, donde se considera como población a los $2n$ demandantes jóvenes de deuda).

Los estados estacionario de (4) se obtienen solucionando el sistema de dos ecuaciones

$$B = \frac{2nB_{-1}}{3n - 2B_{-1}}$$

$$B = B_{-1}.$$

Gráficamente, los estados estacionarios se asocian con los puntos de intersección entre la curva que representa la trayectoria de acumulación de la deuda y la diagonal principal (la diagonal principal $B = B_{-1}$ representa la condición de estacionariedad: valor constante).

La Fig. 1 muestra que sólo existe un valor positivo de la deuda de estado estacionario: $\hat{B} = n/2$. Existe un segundo valor de la deuda en un estado estacionario: el valor trivial $B = 0$ (el origen de la gráfica).

La Fig. 1 también sugiere que el valor $\hat{B}$ no representa un estado estacionario estable. Si, por ejemplo, el valor inicial de la deuda es $B_0 < \hat{B}$, entonces el proceso de acumulación de la deuda no devuelve el volumen de deuda a B_0, sino que reduce la deuda hasta cero. Se comprueba fácilmente sobre la gráfica que si $B_0 > \hat{B}$, entonces la deuda crece exponencialmente, sin freno.

De este análisis se concluye que en el único estado estacionario estable de la deuda $B = 0$.

Esto son buenas noticias para el emisor de la deuda: si no es excesivo (esto es, si el volumen de deuda nunca alcanza el valor $\frac{3n}{2}$), entonces refinanciar la deuda la enjuga eventualmente.

El valor $\hat{B}$ se obtiene resolviendo la ecuación

$$\hat{B} = \frac{2n\hat{B}}{3n - 2\hat{B}}.$$

Hay dos valores que satisfacen esta ecuación:

$$\hat{B} = 0$$

y

$$\boxed{\hat{B} = \frac{n}{2}.}$$