18. Modelo 2: Deuda pública y deuda privada

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de individuos, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Toda persona vive dos períodos consecutivos.

• Cada joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0): una unidad de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2, 2): dos unidades de joven y dos de mayor.

• Hay un gobierno. Cada período, desde $t = 1$, el gobierno emite bonos. Cada bono es un título de deuda que, comprado en el período t a un precio de p unidades de bien, promete pagar una unidad de bien en el siguiente período $t + 1$. Se cree que el gobierno pagará su deuda. El gobierno dilapida los ingresos de la primera emisión de bonos y el pago de la deuda cada período se hace emitiendo bonos, sin déficit ni superávit: la deuda pública se refinancia con más deuda.

• El mercado de deuda pública coexiste con un mercado de préstamos privados: cada persona tiene libertad para decidir qué parte de su ahorro coloca en el mercado de préstamos privados y qué parte en el mercado de préstamos públicos. Ambos mercados se asumen competitivos.

2. Decisiones

• **Decisión de ahorro de un joven.** Todo joven se enfrenta al problema de

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & u = cc' \quad \text{con respecto a } c, c', l \text{ y } b \\
\text{sujeto a} \quad & c + l + pb = w \\
& c' = w' + Rl + b
\end{aligned}
$$

donde

- c es el consumo de joven,
- c' es el consumo de mayor,
- l es el volumen de préstamos privados (ofrecidos si $l > 0$ y demandados si $l < 0$),
- b es la cantidad de bonos (deuda pública) que el joven pretende adquirir y
- p es el precio de un bono en unidades de bien,
- w es la dotación del bien de joven,
- w' es la dotación del bien de mayor,
- R es el tipo de interés bruto (el precio de un préstamo privado).

Dividiendo por R la segunda restricción y sumando las dos, los préstamos privados se cancelan y el problema se reduce a

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = cc' \text{ con respecto a } c, c' \text{ y } b \\ \text{sujeto a} & c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R} + b\left(\frac{1}{R} - p\right) \end{array}$$

donde la restricción representa una restricción presupuestaria vital.

Sin mercado de bonos la restricción presupuestaria vital es

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$$

que establece que el valor descontado presente $c + \frac{c'}{R}$ del consumo total coincide con el valor descontado presente $w + \frac{w'}{R}$ de la dotación total. Esto es, el valor total del consumo es igual al valor total de la dotación cuando ambos valores se expresan en unidades del bien de un mismo período (en este caso, bien del período inicial; si todo se midiera en unidades del bien del período final, se tendría $cR + c' = wR + w'$, que es la misma restricción).

Con bonos existe un término adicional $b\left(\frac{1}{R} - p\right)$ que, aparentemente, haría posible una discrepancia entre el valor del consumo y el valor de la dotación: si $b\left(\frac{1}{R} - p\right) > 0$, el valor del consumo supera el valor de la dotación; y si $b\left(\frac{1}{R} - p\right) < 0$ el valor del consumo es inferior al valor de la dotación.

El tipo R mide la rentabilidad bruta de un préstamo privado. La rentabilidad bruta de un préstamo público (la rentabilidad bruta de comprar bonos) sería el pago del bono al vencimiento (una unidad del bien) dividido por el coste de obtener un bono (su precio p). Ensuma, la rentabilidad bruta de comprar un bono es $1/p$.

Si la rentabilidad R del préstamo privado es superior a la rentabilidad $1/p$ del préstamo público, resulta $R > \frac{1}{p}$; o, equivalentemente, $p > \frac{1}{R}$. Siendo más rentable el préstamo privado, nadie ofrecería préstamos públicos, por lo que se tendría $b = 0$. Por ello, aunque $\frac{1}{R} - p < 0$, el hecho de que $b = 0$ implica que el término $b\left(\frac{1}{R} - p\right)$ se anula. Esta conclusión no es una sorpresa: $c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$ es la restricción cuando sólo hay préstamos privados.

Si la rentabilidad R del préstamo privado es inferior a la rentabilidad $1/p$ del préstamo público, resulta $R < \frac{1}{p}$; o, equivalentemente, $p < \frac{1}{R}$. Siendo más rentable el préstamo público, nadie ofrecería préstamos al gobierno, por lo que $l = 0$ y, en consecuencia, se trataría de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = cc' \text{ con respecto a } c, c' \text{ y } b \\ \text{sujeto a} & c + pb = w \\ & c' = w' + b \end{array}$$

o, multiplicando la segunda restricción por p y sumándola a la primera,

maximizar $u = cc'$ con respecto a c y c'
sujeto a $c + c'p = w + w'p$.

En este caso, aunque no existe un mercado de préstamos privados, se puede definir un tipo de interés a partir de la rentabilidad de los bonos. Dado que la rentabilidad de los bonos es $1/p$, puede definirse $\tilde{R} = \frac{1}{p}$ como el tipo de interés bruto de la economía. De esta definición se concluiría que la restricción vital es

$$c + \frac{c'}{\tilde{R}} = w + \frac{w'}{\tilde{R}}$$

de modo que, para toda persona, su consumo total equivale en valor a su dotación total.

La tercera posibilidad es que la rentabilidad R del préstamo privado sea igual a la rentabilidad $1/p$ del préstamo público. Sólo con esta posibilidad ambos mercados pueden coexistir. Una implicación de la igualdad $R = \frac{1}{p}$ (o lo que es lo mismo, $p = \frac{1}{R}$) es que

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R} + b\left(\frac{1}{R} - p\right)$$

se reduce a

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}.$$

En resumen, asumiendo $p = \frac{1}{R}$, desde la perspectiva de todo joven se trata de

maximizar $u = cc'$ con respecto a c y c'
sujeto a $c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$

que es el mismo problema que se tendría si sólo existiera el mercado de préstamos. La solución:

$$c = \frac{1}{2}\left(w + \frac{w'}{R}\right)$$

$$c' = cR = \frac{1}{2}(wR + w').$$

Según la restricción de joven

$$c + l + pb = w$$

hay dos maneras de ahorrar: comprando bonos en el gobierno o haciendo préstamos privados. Así, se puede definir el ahorro s como la dotación no consumida:

$$s = w - c = l + pb.$$

Como consecuencia,

$$s = w - c = w - \frac{1}{2}\left(w + \frac{w'}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(w - \frac{w'}{R}\right).$$

En particular, la función de ahorro de un joven de G1 es

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(w_1 - \frac{w_1'}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0}{R}\right) = \frac{1}{2}$$

y la función de ahorro de un joven de G2 es

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(w_2 - \frac{w_2'}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{R}\right) = 1 - \frac{1}{R}.$$

Es destacable que estas funciones son las mismas que las obtenidas cuando sólo había mercado de préstamos privados, dado que, en aquel caso, $b = 0$ y la función de ahorro se reduce a la función que determina los préstamos privados: con $b = 0$, $s = l + pb$ deviene $s = l$ (la única forma de ahorro es mediante préstamos privados).

Recordando la hipótesis $p = \frac{1}{R}$, basta con calcular una de las dos variables (por ejemplo, p). Para calcularla, es necesario recurrir a las condiciones de equilibrio competitivo de ambos mercados, de préstamos privados y de bonos.

3. Mercados

En el equilibrio del mercado de préstamos privados (en la medida en que toda unidad prestada conlleva una unidad tomada prestada y, por tanto, el valor agregado de las transacciones es nulo)

$$nl_1 + nl_2 = 0,$$

donde l_1 son los préstamos de cada joven del grupo G1 y l_2 son los préstamos de cada joven del grupo G2.

En el equilibrio del mercado de bonos, la demanda total de bonos coincide con la oferta total B:

$$nb_1 + nb_2 = B,$$

donde b_1 es la demanda de bonos de cada joven del grupo G1 y b_2 es la demanda de bonos de cada joven del grupo G2.

Multiplicando por p la segunda condición y sumándola a la primera,

$$nl_1 + nl_2 + npb_1 + npb_2 = pB.$$

Reordenando,

$$n(l_1 + pb_1) + n(l_2 + pb_2) = pB$$

o

$$ns_1 + ns_2 = pB.$$

Esta condición establece que el valor de la emisión de bonos coincide con el valor del ahorro agregado de los jóvenes: el ahorro de los jóvenes financia la emisión de bonos.

Por la hipótesis de equilibrio presupuestario del gobierno, la deuda B_{-1} generada en el período anterior se paga con el valor pB de la emisión presente de bonos. Formalmente,

$$pB = B_{-1}.$$

Dicho de otro modo,

$$ns_1 + ns_2 = B_{-1}.$$

Así pues,

$$n\frac{1}{2} + n\left(1 - \frac{1}{R}\right) = B_{-1}.$$

Conclusión:

$$\boxed{R = \frac{2n}{3n - 2B_{-1}}.}$$

De esta fórmula se obtendría, como caso particular, el tipo $R = 2/3$ obtenido cuando no existía mercado de bonos (es decir, cuando $B_{-1} = 0$). Dado que la fórmula vale para todo período,

$$R' = \frac{2n}{3n - 2B}. \tag{1}$$

Debido a que también es cierto que

$$ns_1 + ns_2 = pB = \frac{B}{R},$$

resulta que

$$n\frac{1}{2} + n\left(1 - \frac{1}{R}\right) = \frac{B}{R}.$$

Esto es,

$$B = \frac{3nR}{2} - n.$$

Combinando esta ecuación con (1) ,

$$R' = \frac{2n}{3n - 2B} = \frac{2n}{3n - 2\left(\frac{3nR}{2} - n\right)} = \frac{2}{5 - 3R}.$$

En notación temporal explícita,

$$\boxed{R_{t+1} = \frac{2}{5 - 3R_t}.}$$

Esta ecuación en diferencias traza la dinámica del tipo de interés bruto (y del precio del bono, puesto que $p_t = 1/R_t$).

Como función que relaciona R_{t+1} con R_t, es una función creciente y (para valores de R inferiores a 5/3) convexa; véase la Fig. 1.

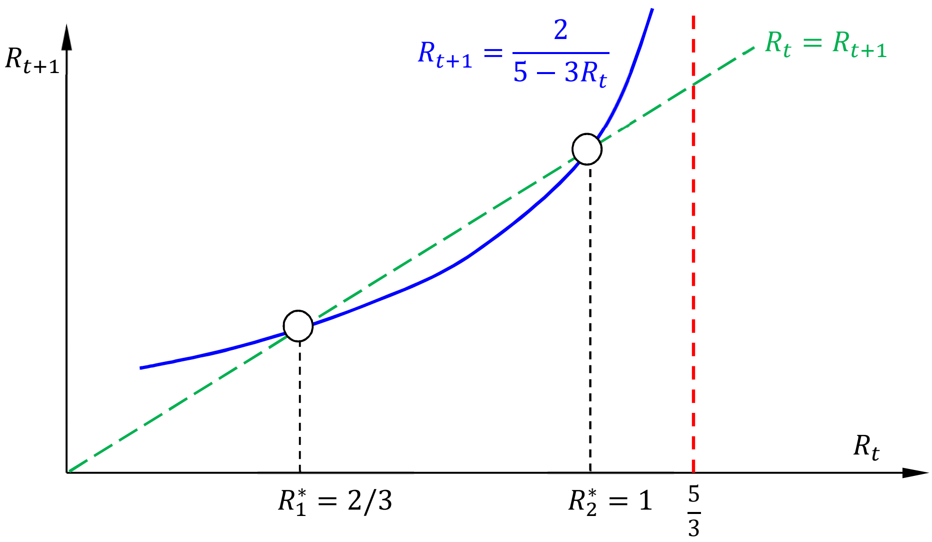

Fig. 1. Dinámica del tipo de interés

Existen dos valores estacionarios del tipo de interés: $R_1^* = 2/3$ y $R_2^* = 1$. Sólo $R_1^* = 2/3$ es estable (compruébalo). Además, sólo $R_1^* = 2/3$ equilibra el mercado de préstamos privados.

La interpretación es que <u>la deuda pública inicial (si no supera ciertos límites) acaba liquidándose con su propia refinanciación, por lo que, eventualmente, el mercado del bono desaparece y sólo queda el mercado de préstamos privados</u> (que tiene $R = 2/3$ como tipo perpetuo de equilibrio).

Si el tipo de interés sobrepasara el valor $R = 1$ la deuda pública no se enjugaría con la refinanciación. Al contrario, la deuda pública se acumularía hasta superar la capacidad de la economía de financiarla. El resultado sería el colapso del mercado de bonos: en algún período la deuda pública no se podría pagar.

4. Indeterminación de la distribución del ahorro

El análisis anterior determina el volumen de ahorro s_1 y s_2 de cada joven. Se demuestra a continuación que no hay una única manera de distribuir el ahorro s_i entre préstamos privados l_i y compra de bonos b_i.

Por la definición de ahorro de cada joven y por la hipótesis $p = \frac{1}{R}$,

$$s_1 = l_1 + pb_1 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$s_2 = l_2 + pb_2 = 1 - \frac{1}{R} = 1 - p. \tag{3}$$

Por la definición de equilibrio en el mercado de préstamos:

$$nl_1 + nl_2 = 0. \tag{4}$$

Por la definición de equilibrio en el mercado de bonos:

$$nb_1 + nb_2 = B. \tag{5}$$

Sabiendo p y B, las cuatro ecuaciones (2)–(5), en principio, deberían determinar los valores de los préstamos, l_1 y l_2, y los valores de la demanda de bonos, b_1 y b_2. Sin embargo, resulta que las ecuaciones (2)–(5) no son linealmente independientes, de manera que los valores l_1, l_2, b_1 y b_2 no son unívocamente determinables. Como resultado, habrá, en equilibrio, un continuo de soluciones l_1, l_2, b_1 y b_2.

Para demostrar que las ecuaciones (2)–(5) no son linealmente independientes, basta con comprobar que (2), (3) y (5) implican (4).

De entrada, utilizando la condición de equilibrio presupuestario $pB = B_{-1}$, (5) equivale a

$$pnb_1 + pnb_2 = pB = B_{-1}.$$

Esto es,

$$pb_1 + pb_2 = \frac{B_{-1}}{n}. \tag{6}$$

Sumando (2) y (3),

$$l_1 + pb_1 + l_2 + pb_2 = \frac{3}{2} - p.$$

Empleando (6),

$$l_1 + l_2 + \frac{B_{-1}}{n} = \frac{3}{2} - p. \tag{7}$$

Como se ha obtenido en §3, en equilibrio,

$$R = \frac{2n}{3n - 2B_{-1}}$$

que equivale a

$$p = \frac{3}{2} - \frac{B_{-1}}{n}.$$

Combinado esta expresión con (7) se obtiene (4).