Un modelo de agentes representativos: el modelo neoclásico de crecimiento

1. Descripción del modelo

El tiempo es discreto. Hay un único bien cada período, que puede acumularse en forma de capital. Definiendo las variables en términos per cápita, en cada período t, la producción en t es igual al consumo en t más la inversión en t:

$$y_t = c_t + i_t. \tag{1}$$

La producción sólo se puede consumir o ahorrar:

$$y_t = c_t + s_t. \tag{2}$$

Se sigue de las condiciones (1) y (2) que $i_t = s_t$.

En cada período una fracción $0 < \delta < 1$ del capital se deprecia. Según (3), el capital en $t+1$ es la inversión en t más el capital remanente del período anterior t.

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t \tag{3}$$

La función de producción f en (4) asume que la producción per cápita depende del capital per cápita.

$$y_t = f(k_t) \tag{4}$$

La función de producción f satisface las propiedades habituales.

- La producción per cápita toma valores positivos: $f \geq 0$.
- La producción per cápita crece con el capital per cápita: $f' > 0$.
- La producción per cápita crece cada vez menos con el capital per cápita: $f'' < 0$.
- Para valores muy pequeños del capital per cápita la producción per cápita es muy grande: $\lim_{k_t \to 0} f'(k_t) = \infty$.
- Para valores muy grandes del capital per cápita la producción per cápita es muy pequeña: $\lim_{k_t \to \infty} f'(k_t) = 0$.

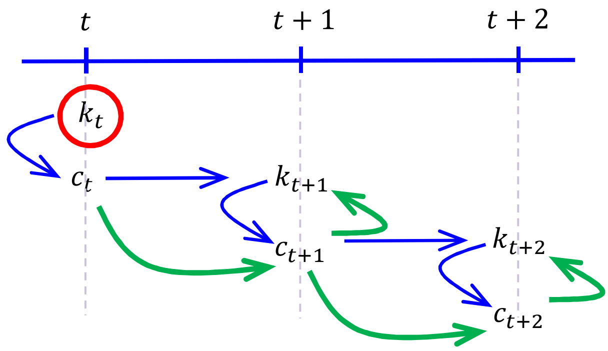
Combinando (1), (3) y (4),

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

o, definiendo $\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$,

$$f(k_t) = c_t + \Delta k_{t+1} + \delta k_t. \tag{5}$$

La ecuación (5) establece la restricción dinámica aa que se enfrenta la economía. La restricción se puede interpretar de dos maneras, según se representa en el esquema de la derecha. Según la interpretación 1, dado k_t, se determinan c_t y k_{t+1}; dado k_{t+1}, se determinan c_{t+1} y k_{t+2}… Según la interpretación 2, dado k_t, se determinan c_t, c_{t+1}, c_{t+2}…



Hay un agente representativo. Asumiendo que la población es constante, las variables se pueden considerar variables per cápita. El agente representativo decide las variables per cápita que le afectan: consumo y capital per cápita. También se presume que el agente recibe como renta la producción per cápita que se obtiene con (4) y el capital per cápita.

8.2. Análisis

Si el objetivo del agente fuera maximizar el consumo cada período (sin descuento), la solución podría obtenerse analizando primero el estado estacionario (el largo plazo de la economía). Sean c and k los valores estacionarios. Se sigue de (5) que $f(k) = c + \delta k$; esto es,

$$c = f(k) - \delta k.$$

Esta condición se corresponde con la idea que el consumo de estado estacionario es la producción que permanece una vez se ha retirado la producción necesaria para reemplazar al capital depreciado y de modo que el capital se mantenga constante.

La condición de primer orden para maximizar c es $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$; por tanto, $f'(k) = \delta$. Dado que $f'' < 0$, la condición de segundo orden $\left(\frac{\partial^2 c}{\partial k^2} < 0\right)$ se satisface.

La ecuación $f'(k) = \delta$ dice que el producto marginal del capital coincide con la tasa de depreciación. Esta solución se conoce como "regla de oro" (*golden rule*). Si $f'(k) < \delta$, entonces se puede incrementar c aumentando k. Si $f'(k) > \delta$, c puede incrementarse reduciendo k.

Perturbaciones y la regla de oro

Sea (c_G, k_G) la solución de la regla de oro. Si el capital se redujera exógenamente a $k < k_G$ y el agente tratara de mantener el consumo c_G, se tendría $c_G = f(k_G) - \delta k_G$ y $c = f(k) - \delta k - \Delta k$. Si $c_G = c$, entonces $f(k_G) - \delta k_G = f(k) - \delta k - \Delta k$. Despejando Δk,

$$\Delta k = (f(k) - \delta k) - (f(k_G) - \delta k_G).$$

Dado que (c_G, k_G) es la solución de la regla de oro, $f(k_G) - \delta k_G > f(k) - \delta k$. En resumen, $\Delta k < 0$.

Este análisis significa que, con menor capital que el capital k_G de la regla de oro, la producción futura sería inferior a la de la regla de oro. El intento de mantener c_G contribuye a reducir más el stock de capital, lo que hace que alcanzar el nivel de consumo c_G sea eventualmente insostenible. La lección es que un consumo 'excesivo' tarde o temprano agota el stock de capital, provocando que la economía sea incapaz de sostener ese consumo.

La mejor respuesta a una perturbación negativa sobre k consiste en renunciar temporalmente a parte del consumo para rehacer el nivel perdido de stock de capital. Una vez recuperado el nivel k_G, el consumo c podrá ser incrementado para volver a alcanzar el nivel c_G de la regla de oro.

Si el consumo en diferentes períodos se valora de manera diferente, el agente puede elegir maximizar el valor presente de la secuencia infinita de consumo $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ o, dada una función u de utilidad común para todo período t, maximizar el valor presente de la secuencia $(u(c_0), u(c_1), u(c_2), \dots)$. Este segundo problema consistiría en

$$\begin{gathered} maximizar \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \;\; respecto\ de\ c_t\ y\ k_{t+1} \\ sujeto\ a \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t \end{gathered}$$

donde el parámetro $\beta \in (0, 1)$ representa el factor de descuento del agente. Se asumen las propiedades habituales de u.

- La utilidad toma valores positivos: $u \geq 0$.
- La utilidad crece con el consumo: $u' > 0$.
- La utilidad crece cada vez menos con el consumo: $u'' < 0$.

Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}_t = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t u(c_t) + \lambda_t (f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1})]$$

que se maximiza respecto de c_t, k_{t+1} y λ_t. $\mathcal{L}_t$ no se maximiza respecto de k_t porque k_t se decidió en $t-1$ y, por tanto, es un valor dado en t.

La solución del problema se obtiene a partir de dos tipos de condiciones:

- la condición de transversalidad
- las condiciones de primer orden (las propiedades de las funciones garantizan el cumplimiento de las condiciones de segundo orden).

La condición de transversalidad establece que

$$lim_{t\to\infty}\ \beta^t u'(c_t)\, k_{t+1} = 0.$$

Para interpretar la condición de transversalidad, supóngase que t es el último período. Si $k_{t+1} > 0$ (se acumula capital en el último período), entonces en la solución debería tenerse $u'(c_t) = 0$: consumir el capital acumuladoo no debería afectar a la utilidad. Por otro lado, si $u'(c_t) > 0$, entonces no se podría acumular capital para un hipótetico siguiente período, dado que la utilidad aumentaría consumiendo ese capital ahora; por ello, se requiere $k_{t+1} = 0$ cuando $u'(c_t) > 0$. La condición de transversalidad resulta de adaptar este argumento interpretando que el límite de los períodos es el último período.

La condiciones de primer orden son, para cada período t,

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_t$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial k_{t+1}} = \lambda_{t+1}(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta) - \lambda_t$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial \lambda_t} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t - k_{t+1}.$$

De la primera

$$\lambda_t = \beta^t\, u'(c_t)$$

$$\lambda_{t+1} = \beta^{t+1}\, u'(c_{t+1}).$$

Sustituyendo λ_t y λ_{t-1} en la segunda condición,

$$\beta^{t+1}\, u'(c_{t+1})\, [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = \ \beta^t\, u'(c_t)$$

De aquí se obtiene (6), que se conoce como ‘ecuación de Euler’ (una de las muchas ‘ecuaciones de Euler’[1]).

$$\beta\, u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = u'(c_t) \tag{6}$$

Interpretación de la ecuación de Euler

¿Cuánto consumo adicional c_{t+1} puede obtenerse reduciendo c_t cuando la utilidad (y todo más allá del período $t+1$) se mantiene constante? Al no verse afectados los períodos posteriores a $t +$

[1] No parece haber aplicación económica a la ‘más bella de las ecuaciones’, la que representa la unidad de las matemáticas (cálculo, análisis complejo, álgebra, geometría, aritmética, lógica) mediante una relación sencilla: la identidad de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$.

1, se puede restringir el análisis a $u(c_t) + \beta\, u(c_{t+1})$, que debe permanecer constante. Tomando la diferencial total,

$$0 = du(c_t) + d[\beta\, u(c_{t+1})] = du(c_t) + \beta\, du(c_{t+1}) = u'(c_t)\, dc_t + \beta\, u'(c_{t+1})\, dc_{t+1}$$

o

$$-\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = \frac{u'(c_t)}{\beta\, u'(c_{t+1})} \tag{7}$$

La ecuación (7) es la relación marginal de sustitución: a cuánto consumo de un período hay que renunciar para incrementar el consumo del otro período pero manteniendo la utilidad constante. Como las restricciones de factibilidad en t y $t+1$ deben respetarse,

$$dc_t + dk_{t+1} = df(k_t) + (1-\delta)\, dk_t$$

$$dc_{t+1} + dk_{t+2} = df(k_{t+1}) + (1-\delta)\, dk_{t+1}$$

Es decir,

$$dc_t + dk_{t+1} = f'(k_t) dk_t + (1-\delta)\, dk_t \tag{8}$$

$$dc_{t+1} + dk_{t+2} = f'(k_{t+1})\, dk_{t+1} + (1-\delta)\, dk_{t+1} \tag{9}$$

Al estar k_t dado en t, $dk_t = 0$ y (8) deviene $dk_{t+1} = -dc_t$: el capital adicional $t+1$ proviene del recorte de consumo en t. Por hipótesis, $dk_{t+2} = 0$. Dado que $dk_{t+1} = -dc_t$, (9) equivale a

$$dc_{t+1} = -f'(k_{t+1})\, dc_t - (1-\delta)\, dc_t$$

o

$$-\frac{dc_{t+1}}{dc_t} = f'(k_{t+1}) + (1-\delta). \tag{10}$$

De (10) y (7) se sigue la ecuación de Euler. Una interpretación es la siguiente. La producción dc_t no consumida en t causa una pérdida de utilidad en t igual a $|u'(c_t)\, dc_t|$. Esta producción se invierte en $t+1$, en forma de dk_{t+1}, para aumentar la producción en $t+1$. La producción extra $|f'(k_{t+1})\, dc_t|$ y la parte no depreciada $(1-\delta)\, dk_{t+1} = |(1-\delta)\, dc_t|$ del capital adicional se consume en $t+1$. Como resultado,

$$dc_{t+1} = [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]\, |dc_t|$$

La utilidad descontada de dc_{t+1} es

$$\beta\, u'(c_{t+1})\, dc_{t+1} = \beta\, u'(c_{t+1})\, [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]\, |dc_t|$$

Pero para mantener la utilidad constante, la utilidad $\beta\, u'(c_{t+1})\, dc_{t+1}$ ganada en $t+1$ debe ser igual a la utilidad $u'(c_t)\, |dc_t|$ perdida en t. Por consiguiente,

$$u'(c_t)\, |dc_t| = \beta\, u'(c_{t+1})\, [f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]\, |dc_t|$$

que es la ecuación de Euler una vez se cancela el término común $|dc_t|$.

La solución de estado estacionario se puede encontrar del siguiente modo. Para los valores de estado estacionario c y k, la ecuación de Euler se convierte en

$$\beta\, u'(c)[f'(k) + 1 - \delta] = u'(c)$$

por lo que

$$f'(k) = \delta + \frac{1}{\beta} - 1\,.$$

La solución de la regla de oro es $f'(k_G) = \delta$. Por la desigualdad $\frac{1}{\beta} - 1 > 0$, se obtiene $f'(k) > f'(k_G)$. Además, la hipótesis $f'' < 0$ implica $k < k_G$. Hay menos capital que en el caso de la regla de oro porque la utilidad futura se descuenta a la tasa $\frac{1}{\beta} - 1$. Por otra parte, $k < k_G$ comporta $c < c_G$: descontar utilidad reduce el consumo.

El análisis dinámico del modelo se basa en dos ecuaciones, la ecuación de Euler (6) y la restricción de factibilidad (5).

$$\beta\, \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\, [f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] = 1$$

$$\Delta k_{t+1} = f(k_t) - c_t - \delta k_t \tag{11}$$

Se puede obtener una aproximación lineal de la ecuación de Euler mediante la serie de Taylor de $u'(c_{t+1})$ alrededor de c_t:

$$u'(c_{t+1}) \approx u'(c_t) + \Delta c_{t+1} u''(c_t)$$

o

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \approx 1 + \Delta c_{t+1} \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\,.$$

Introduciendo las aproximaciones en la ecuación de Euler se justifica (12), donde $\frac{u''}{u'} < 0$.

$$\Delta c_{t+1} = \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \left(\frac{1}{\beta[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]} - 1 \right) \tag{12}$$

Las ecuaciones (11) y (12) establecen los cambios en el stock de capital y en el consumo.

Sean c y k los valores estacionarios: las soluciones de (11) y (12) cuando $\Delta k_{t+1} = \Delta c_{t+1} = 0$. Si $k_{t+1} < k$, entonces $f'(k_{t+1}) > f'(k)$. Por tanto,

$$\beta[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] > \beta[f'(k) + 1 - \delta]\,.$$

Como se ha mostrado previamente, $f'(k) = \delta + \frac{1}{\beta} - 1$. Así pues, $\beta[f'(k) + 1 - \delta] = 1$, $\beta[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta] > 1$, y, en (9) , $\frac{1}{\beta[f'(k_{t+1})+1-\delta]} < 1$. Como $\frac{u''}{u'} < 0$, la conclusión final es que

$$k_{t+1} < k \Rightarrow \Delta c_{t+1} > 0\,.$$

Empleando un razonamiento similar,

$$k_{t+1} > k \Rightarrow \Delta c_{t+1} < 0$$
$$k_{t+1} = k \Rightarrow \Delta c_{t+1} = 0.$$

La Fig. 1 representa la dinámica del consumo: cuando el stock de capital es inferior al valor estacionario k, el consumo crece; cuando el stock es superior a k, el consumo mengua.

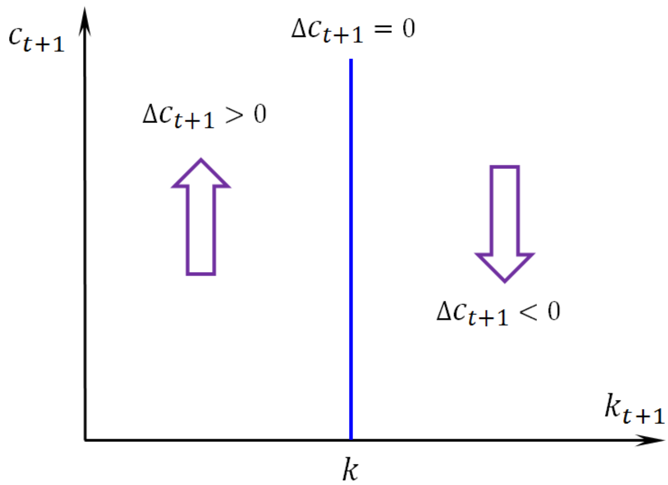


Fig. 1. Dinámica del consumo per cápita

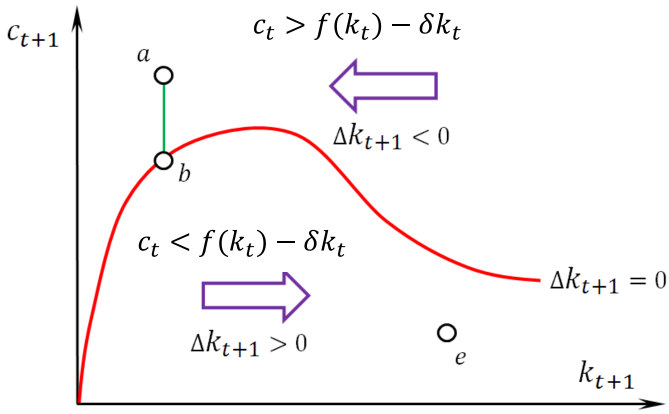


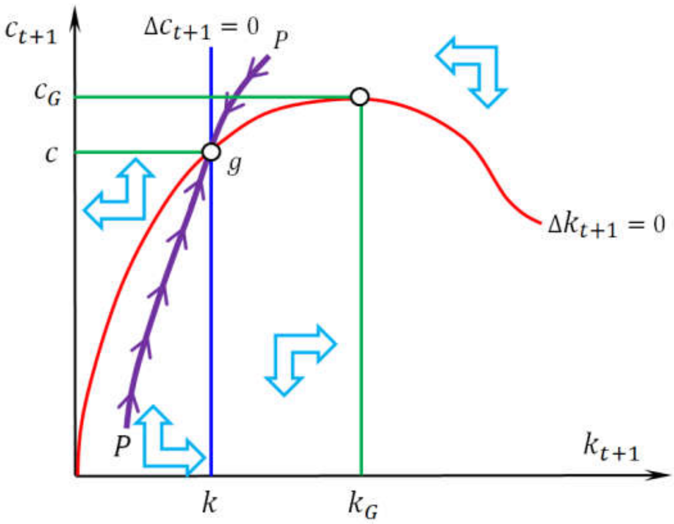
Fig. 2. Dinámica del capital per cápita

La Fig. 2 muestra la dinámica del capital que se sigue de (11). Claramente,

$$\Delta k_{t+1} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(k_t) - \delta k_t > -c_t\,.$$

Por encima de la curva $\Delta k_{t+1} = 0$ el consumo es mayor que el consumo estacionario, con lo que el capital debe desacumularse. En el punto a de la Fig. 2 el consumo excede el valor (dado por b) compatible con el estado estacionario (cuando $\Delta k_{t+1} = 0$). El capital debe reducirse para compensar el exceso de consumo. Por debajo de la curva $\Delta k_{t+1} = 0$ el nivel de consumo posibilita la acumulación de capital.

La Fig. 3 combina las Figs. 1 y 2. La solución de estado estacionario se corresponde con la intersección g de las curvas $\Delta k_{t+1} = 0$ y $\Delta c_{t+1} = 0$. Las flechas indican la dinámica de k_{t+1} y c_{t+1}.



La curva PP (la trayectoria estable) identifica los únicos estados que son alcanzables (PP puede modificarse cuando se altera alguno de los parámetros del modelo).

Si la economía se encuentra fuera de la trayectoria PP, las dinámicas de consumo y capital (flechas azules gruesas) determinan que el estado estacionario no se alcanzará.

Fig. 3. El diagrama de fase del modelo