Apocalipsis caníbal

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Las personas viven dos períodos consecutivos.

• La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0): una unidad de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2, 2): dos unidades de joven y dos de mayor.

• En G2, todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor, de G1 y de G2, tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Los jóvenes de G1 son potenciales caníbales: deciden si comerse a miembros jóvenes de G2 (los mayores de cualquier grupo no se consideran apetitosos).

• Un joven de G2 equivale, en términos de consumo, a $v > 0$ unidades de bien. Por ejemplo, si el bien representa calorías, una persona equivaldría a v calorías. Así, devorar m personas (m puede ser una fracción) es como consumir mv unidades de bien.

• No hay coste material de ser caníbal y las posibles víctimas nunca hacen nada para evitar serlo (motivo: ignoran que hay caníbales en el lugar).

• Igual que los bienes, las personas (como objeto de consumo) no pueden conservarse para ser consumidas en el período siguiente.

• Caso 1: caníbales con reservas morales. En este caso, a la satisfacción material de comer personas se añade la insatisfacción moral de comérselas. En concreto, la función de utilidad de todo joven de G1 es, para $m > 0$,

$$u = (c + mv) \cdot c' \cdot m^{-\alpha}$$

donde $\alpha > 0$ expresa la intensidad de la insatisfacción: a mayor α, más rechazo personal produce comer personas. Si $m = 0$, se define $u = c \cdot c'$. Hipótesis adicional: los jóvenes de G1 no tienen en cuenta que canibalizar prestatarios afecta el tipo de interés R.

• Caso 2: caníbales sin reservas morales. Cuando no hay reticencias morales al canibalismo, se asume que se tiene en cuenta que canibalizar afecta a R y que la función de utilidad de todo joven de G1 es

$$u = (c + mv) \cdot c'.$$

• Canibalizar parte de una persona implica que se pierde la parte proporcional de su dotación y que se preserva la parte restante. Por ejemplo, $m = 1/3$ significa que un joven pierde 1/3 de su cuerpo y 1/3 de su dotación, pero conserva la vida y 2/3 de su dotación. Una opción alternativa (no considerada) es que el caníbal que canibaliza la fracción p de una persona se apropia de la misma fracción de la dotación de la persona canibalizada.

2. Caníbales con reservas morales

• **Decisiones de los jóvenes de G1.** El problema de todo joven de G1 es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_1 = (c_1 + mv) \cdot c_1' \cdot m^{-\alpha} \quad \text{con respecto a } c_1, c_1', l_1 \text{ y } m \\ \text{sujeto a} & c_1 + l_1 = 1 \\ & c_1' = Rl_1 \end{array}$$

en donde se ignora que R depende de m. Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar } u_1 = (1 - l_1 + mv)\, Rl_1\, m^{-\alpha} \text{ con respecto a } l_1 \text{ y } m.$$

Maximizar respecto de l_1 requiere

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = (1 + mv)\, R\, m^{-\alpha} - 2Rl_1\, m^{-\alpha}.$$

Esto es, dado que en la solución $m \neq 0$,

$$l_1 = \frac{1 + mv}{2}.$$

Maximizar respecto de m requiere

$$0 = \frac{du_1}{dm} = -(1 - l_1)\, Rl_1\, \alpha\, m^{-\alpha-1} + Rl_1 v\, (1 - \alpha)\, m^{-\alpha}.$$

Por consiguiente, puesto que $Rl_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} (1 - l_1)\,\alpha &= v(1-\alpha)m \\ \left(\frac{1 - mv}{2}\right)\alpha &= v(1-\alpha)m \\ \alpha - \alpha mv &= 2v(1-\alpha)m \\ \alpha &= (2-\alpha)vm \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{\alpha}{(2-\alpha)v}.}$$

Sabiendo que

$$l_1 = \frac{1 + mv}{2}$$

se concluye que

$$l_1 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2-\alpha}\right)$$

$$\boxed{l_1 = \frac{1}{2-\alpha}.}$$

Si $\alpha > 2$, el desarrollo anterior no es válido, ya que $\alpha > 2$ implicaría $l_1 < 0$, en cuyo caso $c_1' = Rl_1 < 0$, que sería un valor no permitido. Como consecuencia, cuando $\alpha > 2$ la solución sería de esquina: m toma el valor mínimo o el valor máximo admisible. El valor mínimo de m es obviamente cero. Al haber el mismo número de jóvenes en G1 que en G2, el valor máximo de m es 1. No puede ser solución $m = 1$, pues no quedarían prestatarios de los que recibir bien de mayor. En suma, si no hay solución interior de m, entonces no se canibaliza: $m = 0$.

Dado que una solución interior requiere $m < 1$, se deduce que

$$m = \frac{\alpha}{(2-\alpha)v} < 1$$

o

$$v > \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

• Decisiones de los jóvenes de G2. El problema de todo joven de G2 es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_2 = c_2\, c_2' \quad \text{con respecto a } c_2, c_2' \text{ y } l_2 \\ \text{sujeto a} & c_2 + l_2 = 2 \\ & c_2' = 2 + Rl_2. \end{array}$$

La solución se ha obtenido en modelos anteriores:

$$\boxed{l_2 = 1 - \frac{1}{R}.}$$

• Equilibrio en el mercado de préstamos. Como los jóvenes de G1 canibalizan a jóvenes de G2, los jóvenes de G2 vivos para participar en el mercado son $n - nm = n(1-m)$. La condición de equilibrio en el mercado de préstamos será

$$nl_1 + n(1-m)l_2 = 0$$

y así

$$l_1 + (1-m)l_2 = 0$$

$$\frac{1}{2-\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha}{(2-\alpha)v}\right)\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2-\alpha} + \left(\frac{(2-\alpha)v - \alpha}{(2-\alpha)v}\right)\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

$$1 + \left(\frac{(2-\alpha)v - \alpha}{v}\right)\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

$$v + \big((2-\alpha)v - \alpha\big)\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

$$(3-\alpha)v-\alpha = \big((2-\alpha)v-\alpha\big)\frac{1}{R}$$

$$\boxed{R = \frac{(2-\alpha)v-\alpha}{(3-\alpha)v-\alpha}.}$$

Además,

$$c_1 = 1 - l_1 = 1 - \frac{1}{2-\alpha} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$$

$$c_1' = Rl_1 = \frac{(2-\alpha)v-\alpha}{(3-\alpha)v-\alpha}\cdot\frac{1}{2-\alpha}.$$

Por ejemplo, si $v = 2$ y $\alpha = 1/2$, se tiene

$$m = \frac{\alpha}{(2-\alpha)v} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\cdot 2} = \frac{1}{6}$$

de manera que cada joven de G1 canibaliza la sexta part de un joven de G2 y el efecto en el mercado de préstamos equivale a que se reduce un sexto la demanda de préstamos. Por otro lado,

$$R = \frac{(2-\alpha)v-\alpha}{(3-\alpha)v-\alpha} = \frac{\left(2-\frac{1}{2}\right)2-\frac{1}{2}}{\left(3-\frac{1}{2}\right)2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{5}{9}$$

$$c_1 = 1 - l_1 = 1 - \frac{1}{2-\alpha} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$c_1' = Rl_1 = \frac{5}{9}\frac{2}{3} = \frac{10}{27}.$$

3. Caníbales sin reservas morales

• **Decisiones de los jóvenes de G2.** El problema de todo joven de G2 es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_2 = c_2\, c_2' \ \text{ con respecto a } c_2, c_2' \text{ y } l_2 \\ \text{sujeto a} & c_2 + l_2 = 2 \\ & c_2' = 2 + Rl_2. \end{array}$$

Solución:

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R}.$$

• **Decisiones de los jóvenes de G1.** El problema de todo joven de G1 es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_1 = (c_1 + mv)\, c_1' \ \text{ con respecto a } c_1, c_1', m \text{ y } l_1 \\ \text{sujeto a} & c_1 + l_1 = 1 \\ & c_1' = Rl_1 \end{array}$$

donde R se sabe dependiente de m. Así que se trata de

$$\text{maximizar } \; u_1 = (1 - l_1 + mv)\, R l_1 \; \text{ con respecto a } l_1 \text{ y } m.$$

Maximizar respecto de l_1 requiere

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = R(1 - 2l_1 + mv)$$

De aquí,

$$l_1 = \frac{1 + mv}{2}.$$

Maximizar respecto de m requiere

$$0 = \frac{du_1}{dm} = \frac{d(vl_1 mR)}{dm} = vl_1\left(R + m\frac{dR}{dm}\right).$$

Por consiguiente, m se determina por medio de la condición

$$R + m\frac{dR}{dm} = 0.$$

• **Equilibrio en el mercado de préstamos.** Para establecer la dependencia de R con respecto a m hay que acudir a la condición de equilibrio en el mercado de préstamos:

$$\begin{gathered} nl_1 + n(1-m)l_2 = 0 \\ l_1 + (1-m)l_2 = 0 \\ \frac{1+mv}{2} + (1-m)\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0 \\ \frac{1+mv}{2} + 1 - m = \frac{1-m}{R} \\ \frac{3 + mv - 2m}{2} = \frac{1-m}{R} \\ R = \frac{2-2m}{3 - 2m + mv}. \end{gathered}$$

• **Canibalizados.** De la fórmula de R

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-2(3 - 2m + mv) - 2(1-m)(v-2)}{(3 - 2m + mv)^2}$$

y recuperando la condición

$$R + m\frac{dR}{dm} = 0$$

se obtiene

$$\frac{2(1-m)}{3-2m+mv} = m\frac{2(3-2m+mv)+2(1-m)(v-2)}{(3-2m+mv)^2}$$

$$(1-m)(3-2m+mv) = m(3-2m+mv) + m(1-m)(v-2)$$

$$(1-2m)(3-2m+mv) = m(1-m)(v-2)$$

$$(1-2m)(3+m(v-2)) = (1-m)m(v-2)$$

$$3(1-2m) + (1-2m)m(v-2) = (1-m)m(v-2)$$

$$3(1-2m) = m^2(v-2)$$

$$m^2(v-2) + 6m - 3 = 0$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36+12(v-2)}}{2(v-2)}.$$

Se deja como ejercicio determinar los valores admisibles de m (cuánto se canibaliza) en función de v (el valor de canibalizar).

A modo de ilustración, si $v = 1$ (cantidad de personas y cantidad de bienes son equivalentes en valor para los jóvenes de G1),

$$m = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{-2} = 3 \pm \sqrt{6}$$

en cuyo caso sólo es admisible

$$m = 3 - \sqrt{6} \approx 0{,}5505.$$