Capital y tecnologías de acumulación

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse pero sí acumularse espontáneamente.

• Hay dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Cada persona vive dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es $c$el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de cada miembro de G1 es $(1, 0)$: una unidad de bien de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es $(2, 2)$: dos unidades de joven y dos de mayor.

• Existe una tecnología que permite acumular bien un período. La acumulación es incompleta (conlleva una pérdida): si en el período t se reserva la cantidad de bien k' para ser empleada en el período siguiente $t + 1$, la cantidad efectivamente disponible en $t + 1$ es $\alpha k'$.

2. Análisis

• **Préstamos y acumulación.** Los jóvenes pueden dedicar el bien a tres usos: consumirlo, prestarlo y acumularlo.

• **Decisión de prestar/acumular de los miembros de G1.** Todo joven de G1 trata de

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_1 = c_1\, c_1' \ \text{ respecto de } c_1,\, c_1',\, l_1 \text{ y } k_1' & \\ \text{sujeto a} & c_1 + k_1' + l_1 = 1 & \text{(restricción presente, de joven)} \\ & c_1' = \alpha\, k_1' + R l_1 & \text{(restricción futura, de mayor)} \end{array}$$

donde

- c_1 es el consumo de joven
- c_1' es el consumo de mayor
- l_1 son los préstamos
- R es el tipo de interés bruto y
- k_1' es la cantidad de bien acumulada y disponible parcialmente (la cantidad $\alpha k_1' < k_1'$) en el siguiente período (se escribe k_1' en lugar de k_1, aunque ambas notaciones serían válidas).

Dividiendo por R la segunda restricción y sumando las dos se obtiene una restricción única:

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1 + k_1'\left(\frac{\alpha}{R} - 1\right).$$

Esta restricción evidencia la importancia de la relación entre el parámetro α (que mide cuán eficiente es la tecnología de acumulación) y el tipo de interés R.

(i) Si $\alpha = R$, entonces el término $k_1' \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right)$ se anula y el problema de maximización es igual al problema sin la tecnología de acumulación (dado que la restricción sería $c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1$).

(ii) Si $\alpha > R$, es más provechoso acumular el bien que prestarlo; en tal caso $l_1 = 0$.

(iii) Si $\alpha < R$, es más provechoso prestar el bien que acumularlo; por consiguiente, $k_1' = 0$.

El caso (iii) es equivalente al análisis sin la tecnología de acumulación (cuando sólo existía un mercado de préstamos como mecanismo indirecto de acumulación).

El caso (ii) elimina la necesidad del mercado de préstamos. El problema entonces se reduce a

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } u_1 = c_1\, c_1' \text{ respecto de } c_1,\ c_1' \text{ y } k_1' \\ &\text{sujeto a} \quad c_1 + k_1' = 1 \\ &\qquad\qquad\quad c_1' = \alpha\, k_1' \end{aligned}$$

que equivale a

$$\text{maximizar } u_1 = (1 - k_1')\, \alpha\, k_1' \text{ respecto de } k_1'.$$

En la solución, $k_1' = c_1 = 1/2$ y $c_1' = \alpha/2$.

El caso (i) es el más interesante, en tanto que coexisten el uso de la tecnología y el mercado de préstamos. El elemento más restrictivo es que $\alpha = R$ hace que todo joven sea indiferente entre utilizar la tecnología o el mercado. En este caso, se trata de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } u_1 = c_1\, c_1' \text{ respecto de } c_1 \text{ y } c_1' \\ &\text{sujeto a} \quad c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1 \quad \text{restricción presupuestaria vital).} \end{aligned}$$

La solución coincide con la solución sin tecnología de acumulación: $c_1 = 1/2$ y $c_1' = R\, c_1$.

Se sigue de la restricción de joven y $c_1 = 1/2$ que

$$\boxed{k_1' + l_1 = 1/2.} \tag{1}$$

Esta condición dice que todo joven de **G1** quiere ahorrar ½ unidades de bien y que lo hace combinando acumulación (k_1') y préstamos (l_1).

• **Decisión de prestar/acumular de los miembros de G2.** Todo joven de G2 pretende

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } u_2 = c_2\, c_2' \text{ respecto de } c_2,\ c_2',\ l_2 \text{ y } k_2' \\ &\text{sujeto a} \quad c_2 + k_2' + l_2 = 2 \qquad \text{(restricción presente, de joven)} \\ &\qquad\qquad\quad c_2' = 2 + \alpha\, k_2' + R l_2 \quad \text{(restricción futura, de mayor).} \end{aligned}$$

Dividiendo por R la segunda restricción y sumando las dos se obtiene la restricción vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R} + k_2'\left(\frac{\alpha}{R} - 1\right).$$

Los tres casos en el análisis de las decisiones de los jóvenes de G1 se vuelven a dar. Si $\alpha < R$, los jóvenes de G2 renuncian a acumular y sólo participan en el mercado de préstamos.

Si $\alpha > R$, no hay mercado de préstamos ($l_2 = 0$) y los jóvenes de G2 acumulan bien. En concreto, se trataría de

maximizar $u_2 = c_2\, c_2'$ respecto de c_2, c_2' y k_2'

sujeto a $c_2 + k_2' = 2$

$c_2' = 2 + \alpha\, k_2'$

que equivale a

maximizar $u_2 = (2 - k_2')\,(2 + \alpha\, k_2')$ respecto de k_2'.

La solución implicaría $k_2' = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Sin embargo, este valor no es admisible: como $\alpha < 1$, resultaría el valor imposible $k_2' < 0$ (sólo es acumulable una cantidad positiva del bien). En conclusión, con $\alpha > R$, los jóvenes de G2 ni entran en el mercado de préstamos ni acumulan: se quedan con lo que tienen y el consumo cada período coincide con la dotación del período.

La última posibilidad, $\alpha = R$, significa tener que

maximizar $u_2 = c_2\, c_2'$ respecto de c_2 y c_2'

sujeto a $c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R}$.

La solución coincide con la solución sin tecnología de acumulación: $c_2 = 1 + 1/R$ y $c_2' = Rc_2$.

Empleando la restricción de joven y $c_2 = 1 + 1/R$ se obtiene

$$\boxed{k_2' + l_2 = 1 - \frac{1}{R}.} \qquad (2)$$

Esta condición dice que todo joven de G2 quiere ahorrar en función del tipo de interés, también combinando acumulación (k_2') y préstamos (l_2).

• **Solución.** Este modelo tiene la peculiaridad de que la solución es múltiple: existe un continuo de soluciones. La solución del modelo pasa por combinar las ecuaciones (1) (que dicta la decisión de ahorrar de los jóvenes de G1), (2) (que representa la decisión de ahorrar de los jóvenes de G2), la condición de equilibrio $nl_1 + nl_2 = 0$ del mercado de préstamos y la condición inicial que definía este caso: $\alpha = R$ (la igualdad entre tipo de interés y la proporción de bien efectivamente acumulada).

Por (1), $l_1 = \frac{1}{2} - k_1'$; por (2), $l_2 = 1 - \frac{1}{R} - k_2'$. Empleando la condición de equilibrio del mercado de préstamos y $\alpha = R$,

$$0 = l_1 + l_2 = \left(\frac{1}{2} - k_1'\right) + \left(1 - \frac{1}{R} - k_2'\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha} - k_1' - k_2'$$

o bien, designando por K' el total de bien $k_1' + k_2'$ acumulado

$$\boxed{K' = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha}.}$$

En suma, <u>no hay información suficiente para determinar los valores k_1' y k_2'</u>. Todo lo que puede saberse es su suma: el total K' de bien que se acumula. Así, eligiendo (por ejemplo) un valor de k_1', se determina k_2' (dado que $k_1' + k_2' = K' = 3/2 - 1/\alpha$). A partir de k_1', por (1), se averigua l_1. Y sabiendo k_2', por (2), se calcula l_2. Por todo ello, la solución tiene un grado de libertad: para cada valor de k_1', se determinan k_2', l_1 y l_2 (los valores de los consumos c_1, c_2, c_1' y c_2' quedan determinados por la condición $R = \alpha$).

3. Cuando la tecnología de acumulación depende de la inversión hecha en la tecnología

• **Inversión en la tecnología.** Esta variante del modelo previo consiste en endogeneizar el parámetro α. Una forma simple de hacerlo es hacer depender α de la cantidad de bien que se acumula. Por ejemplo, α se puede definir como una función creciente de k': <u>cuanto más capital se acumula, más eficiente es la acumulación</u>. Una formulación simple es definir

$$\alpha = f(k') = a\,k'$$

donde a es una constante positiva inferior a 1 (si $a > 1$ se tendría producción, no acumulación).

• **Análisis.** Se deja como ejercicio solucionar los casos con $\alpha \neq R$. Cuando $\alpha = R$ las soluciones son iguales a las obtenidas previamente. En particular,

$$k_1' + l_1 = \frac{1}{2}$$
$$k_2' + l_2 = 1 - \frac{1}{R}$$
$$l_1 + l_2 = 0\,.$$

La única diferencia significativa es que $\alpha = R$ significa que

$$a\,k_1' = R = a\,k_2'$$

y, en consecuencia,

$$k_1' = k_2'.$$

La condición $\alpha = R$ no concreta el valor de R, puesto que α es una función. Definiendo $k' = k_1' = k_2'$, los préstamos serían

$$l_1 = \frac{1}{2} - k'$$

$$l_2 = 1 - k' - \frac{1}{a\,k'}$$

Aplicando la condición de equilibrio,

$$0 = l_1 + l_2 = \left(\frac{1}{2} - k'\right) + \left(1 - k' - \frac{1}{a\,k'}\right) = \frac{3}{2} - 2k' - \frac{1}{a\,k'}$$

o, equivalentemente,

$$4\,a\,(k')^2 - 3\,a\,k' + 2 = 0.$$

Resolviendo,

$$\boxed{k' = \frac{3}{8}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{32}{9a}}\right).}$$

Para que los valores resultantes de la fórmula anterior sean admisibles, es necesario que la raíz cuadrada no se aplique a un número negativo. Esto es, se requiere $9a > 32$ o $a > 32/9$. Pero por hipótesis del modelo $a < 1$, lo que implica que no hay solución en la que todos los jóvenes acumulan.

• **Ejercicio 1.** ¿Existen soluciones donde sólo un grupo acumula?

• **Ejercicio 2.** Modeliza y resuelve la variante del modelo de §2 en que α depende positivamente de una parte de la dotación que el joven invierte en tecnología de acumulación. [Sugerencia: todo joven escoge una cantidad e de bien, con $0 \leq e \leq 1$, tal que $\alpha = e$.]