El modelo de crecimiento de Solow y Swan aumentado con capital humano

1. El modelo de Mankiw, Romer y Weil (1992)

Toda variable se refiere a un período temporal dado t, excepto si va acompañada del apóstrofe $'$, en cuyo caso la variable se refiere al período $t+1$.

La función de producción agregada es

$$Y = K^{\alpha} H^{\widehat{\alpha}} (AL)^{1-\alpha-\widehat{\alpha}}$$

donde:

- Y es la producción agregada
- K es el stock de capital material
- H es el capital humano
- L es la cantidad de factor trabajo
- A es una medida del progreso tecnológico (que aumenta la productividad del trabajo) y
- los parámetros positivos α y $\hat{\alpha}$ satisfacen $\alpha + \hat{\alpha} < 1$.

Notación:

- N es la tasa bruta de crecimiento de L (de manera que $L' = NL$)
- G es la tasa bruta de crecimiento de A (de manera que $A' = GA$)
- s es la propensión marginal a acumular el capital material K
- $\hat{s}$ es la propensión marginal a acumular el capital humano H
- δ es la tasa a que se deprecia el capital material K y
- $\hat{\delta}$ es la tasa a que se deprecia el capital humano H.

Las variables per cápita se definen en unidades de trabajo efectivas: $k = \frac{K}{AL}$, $h = \frac{H}{AL}$ y $y = \frac{Y}{AL}$.

$$y = \frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha} H^{\widehat{\alpha}} (AL)^{1-\alpha-\widehat{\alpha}}}{AL} = \frac{K^{\alpha} H^{\widehat{\alpha}}}{(AL)^{\alpha+\widehat{\alpha}}} = \frac{K^{\alpha}}{(AL)^{\alpha}} \frac{H^{\widehat{\alpha}}}{(AL)^{\widehat{\alpha}}} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} \left(\frac{H}{AL}\right)^{\widehat{\alpha}} = k^{\alpha} h^{\widehat{\alpha}} .$$

La dinámica de acumulación del capital material satisface

$$K' = sY + (1-\delta)K.$$

Tras dividir ambos lados por $A'L'$,

$$k' = \frac{K'}{A'L'} = \frac{sY}{A'L'} + \frac{(1-\delta)K}{A'L'} = s\frac{K^{\alpha} H^{\widehat{\alpha}} (AL)^{1-\alpha-\widehat{\alpha}}}{(GA)(NL)} + \frac{(1-\delta)K}{(GA)(NL)} =$$

$$= \frac{s}{GN} \frac{K^{\alpha} H^{\widehat{\alpha}} (AL)^{1-\alpha-\widehat{\alpha}}}{AL} + \frac{1-\delta}{GN}\frac{K}{AL} = \frac{s}{GN}\frac{K^{\alpha} H^{\widehat{\alpha}}}{(AL)^{\alpha+\widehat{\alpha}}} + \left(\frac{1-\delta}{GN}\right)k =$$

$$= \frac{s}{GN}\frac{K^{\alpha}}{(AL)^{\alpha}}\frac{H^{\widehat{\alpha}}}{(AL)^{\widehat{\alpha}}} + \frac{1-\delta}{GN}k = \frac{s}{GN}k^{\alpha}h^{\widehat{\alpha}} + \frac{1-\delta}{GN}k = \frac{s}{GN}y + \frac{1-\delta}{GN}k .$$

Restando k de ambos lados,

$$\Delta k = \frac{s}{GN} y - \frac{\delta + GN - 1}{GN} k \,.$$

Esta ecuación coincide con la del modelo de Solow y Swan. La condición $\Delta k = 0$ de estacionariedad en la acumulación del capital material per cápita equivale a $sy = (\delta + GN - 1)k$. Es decir,

$$s k^{\alpha} h^{\hat{\alpha}} = (\delta + GN - 1)k.$$

Despejando h,

$$\boxed{h = \left(\frac{\delta + GN - 1}{s}\right)^{1/\hat{\alpha}} k^{(1-\alpha)/\hat{\alpha}} \,.}$$

La ecuación anterior establece la condición $\Delta k = 0$ de estacionariedad en la acumulación de capital material per cápita y se representa en la Fig. 1.

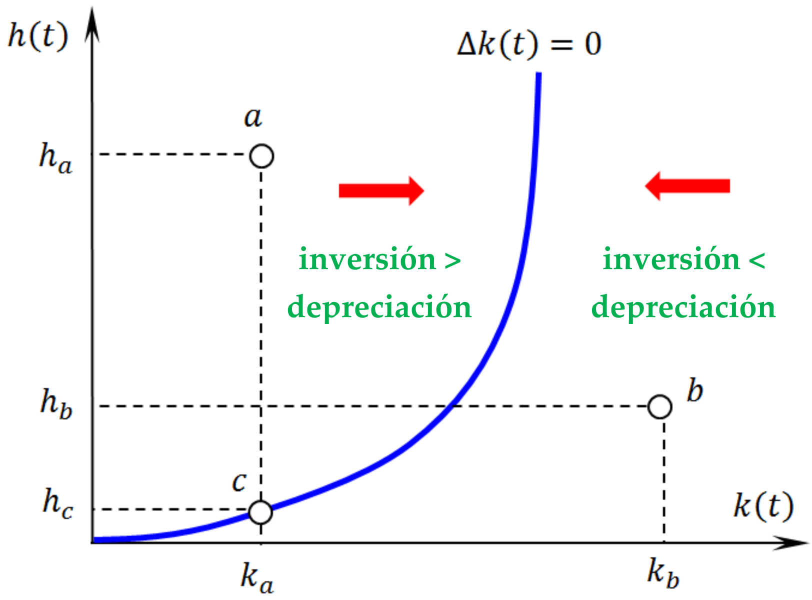

Fig. 1. Representación gráfica de la condición de estacionariedad $\Delta k(t) = 0$

En puntos como a en la Fig. 1, la inversión en k es mayor que la depreciación de k, por lo que k aumenta. En general, el capital material per cápita k aumenta en los puntos a la izquierda de la curva $\Delta k = 0$.

La inversión es mayor que la depreciación en a porque, dado k_a, es suficiente tener un capital humano per cápita igual a h_c para que la inversión sea igual a la depreciación (es decir, para $\Delta k = 0$ que se cumpla).

Como $h_a > h_c$, existe un exceso de capital humano que crea demasiada producción, lo que genera demasiada inversión (en comparación con la depreciación correspondiente a k_a).

De manera análoga, el capital material per cápita k disminuye en los puntos a la derecha de la curva $\Delta k = 0$ (como el punto b en la Fig. 1).

Por otro lado, comenzando con

$$H' = \hat{s}Y + (1 - \hat{\delta})H$$

una argumentación similar conduce a

$$\Delta h = \frac{\hat{s}}{GN} y - \frac{\hat{\delta} + GN - 1}{GN} h \,.$$

La condición de estacionariedad $\Delta h = 0$ en la acumulación de capital humano per cápita equivale a

$$\hat{s} k^{\alpha} h^{\hat{\alpha}} = (\hat{\delta} + GN - 1)h.$$

Despejando h,

$$\boxed{h = \left(\frac{\hat{s}}{\hat{\delta} + GN - 1}\right)^{1/(1-\hat{\alpha})} k^{\alpha/(1-\hat{\alpha})} \,.}$$

La ecuación anterior establece la condición $\Delta h = 0$ de estacionariedad en la acumulación de capital humano y se representa en la Fig. 2.

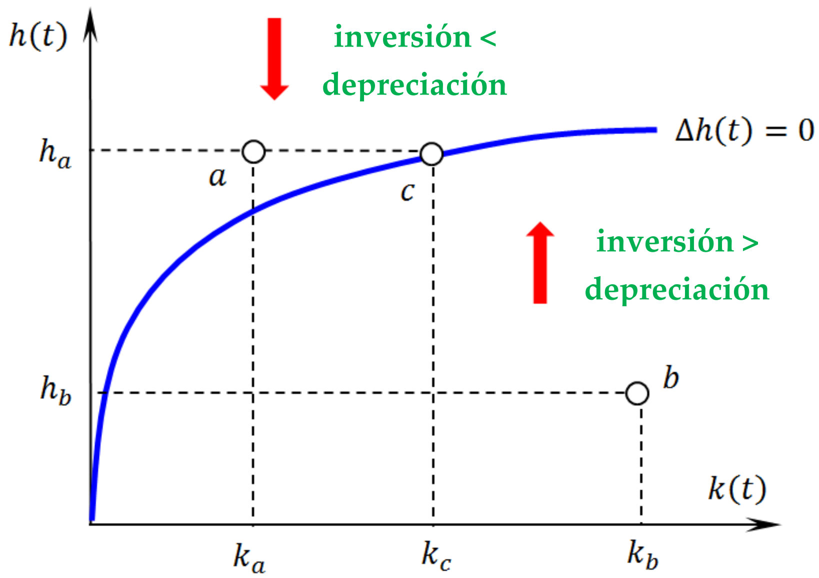

Figura 2. Representación gráfica de la condición de estacionariedad $\Delta h(t) = 0$

En puntos como a en la Fig. 2, la inversión en h es menor que la depreciación de h, por lo que h disminuye. En general, <u>el capital humano per cápita h cae en puntos encima de la curva</u> $\Delta h = 0$.

La inversión es menor que la depreciación en a porque, dado h_a, es necesario tener un stock de capital per cápita igual a k_c para que la inversión sea igual a la depreciación (para que $\Delta h = 0$).

Dado que $k_a < k_c$ existe una escasez de capital per cápita que crea una brecha de producción que genera una inversión insuficiente en h (en comparación con la depreciación correspondiente a h_a).

Análogamente, el capital humano per cápita h crece en puntos por debajo de la curva $\Delta h = 0$ (como el punto b en la Fig. 2).

Gráficamente, la solución del modelo se obtiene combinando la Fig. 1 con la Fig. 2. La Fig. 3 muestra la combinación y evidencia que la dinámica de k y h garantiza la convergencia al único punto e donde se intersecan ambas curvas.

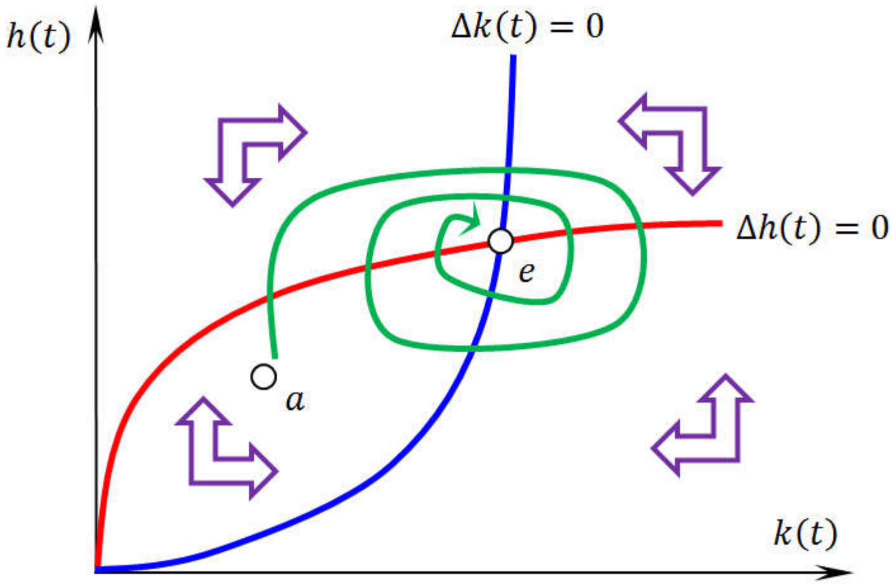

Fig. 3. Solución estacionaria del modelo: valores tales que $\Delta k(t) = \ \Delta k(t) = 0$

Como en el modelo de Solow y Swan, la solución estacionaria es única y estable. La diferencia es que el concepto único de capital del modelo de Solow y Swan en este modelo se bifurca en dos conceptos: capital material y capital humano.

Mankiw, N. Gregory; David Romer; David N. Weil. (1992): "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics 107, 407-437.