Modelos de crecimiento endógeno

1. Un modelo de crecimiento básico

El modelo se basa en la secuencia conceptual

rentabilidad (tasa de retorno del capital) $\rightarrow$ acumulación de capital $\rightarrow$ crecimiento económico

y en las ecuaciones

- condición de equilibrio (ahorro igual a inversión) $S = I$
- función de ahorro (con tasa de ahorro s constante) $S = sY$
- acumulación de capital (inversión menos depreciación) $\Delta K = I - \delta K$

donde $0 < s < 1$ y donde $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación del stock de capital material.

Tras insertar la condición de equilibrio y la función de ahorro en la acumulación de capital,

$$\Delta K = sY - \delta K.$$

Dividiendo ambos lados por K,

$$\frac{\Delta K}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta\,. \tag{1}$$

Definiendo la relación capital/producto como

$$v = \frac{K}{Y}$$

y la tasa de crecimiento del stock de capital como

$$g_K = \frac{\Delta K}{K}$$

entonces (1) equivale a

$$g_K = \frac{s}{v} - \delta\,.$$

Para que el capital K crezca debe ocurrir que $g_K > 0$; es decir, $s > \delta v$.

Partiendo de la relación capital-trabajo $k = \frac{K}{L}$, la tasa g_k de crecimiento de k es (donde el apóstrofe "$\,'\,$" designa una variable del siguiente período)

$$g_k = \frac{\Delta k}{k} = \frac{k' - k}{k} = \frac{k'}{k} - 1 = \frac{\frac{K'}{L'}}{\frac{K}{L}} - 1 = \frac{\frac{K'}{K}}{\frac{L'}{L}} - 1 = \frac{g_K + 1}{g_L + 1} - 1 = \frac{g_K - g_L}{g_L + 1}.$$

Por consiguiente, si la población crece a una tasa constante $n > 0$,

$$g_k = \frac{g_K - g_L}{g_L + 1} = \frac{\frac{s}{v} - \delta - n}{n + 1}.$$

La relación capital-trabajo k crece si $g_k > 0$; es decir, si

$$\frac{s}{v} - \delta - n > 0$$

o

$$\frac{s}{v} > \delta + n\,.$$

Por último, si el progreso tecnológico A aumenta la productividad del factor trabajo (definido como trabajo efectivo AL) y se define la relación capital/trabajo (efectivo) como $k = \frac{K}{AL}$, entonces la tasa de crecimiento g_k de k es

$$g_k = \frac{\Delta k}{k} = \frac{k'}{k} - 1 = \frac{\frac{K'}{A'L'}}{\frac{K}{AL}} - 1 = \frac{\frac{K'}{K}}{\frac{L'}{L}\frac{A'}{A}} - 1 = \frac{g_K + 1}{(g_L + 1)(g_A + 1)} - 1 = \frac{g_K - g_L - g_A(g_L + 1)}{(g_L + 1)(g_A + 1)}\,.$$

Si la población crece a tasa constante $n > 0$ y la tecnología progresa a tasa constante $a > 0$,

$$g_k = \frac{g_K - g_L - g_A(g_L + 1)}{(g_L + 1)(g_A + 1)} = \frac{\frac{s}{v} - \delta - n - a(1+n)}{(1+a)(1+n)}\,.$$

Como resultado,

$$g_k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{v} > \delta + n + a(1+n)\,.$$

Modelos de crecimiento reconocidos pueden obtenerse del modelo anterior estableciendo hipótesis sobre la tasa de ahorro s o la relación capital/producto v.

En concreto, el modelo de crecimiento neoclásico considera que la tasa de ahorro s es endógena (variable), mientras que en el modelo de Solow y Swan, el modelo de Harrod y Domar, y el modelo AK la tasa de ahorro s es exógena (constante).

Por otro lado, en el modelo de crecimiento neoclásico y en el modelo de Solow y Swan la ratio v es variable, en tanto que en el modelo de Harrod y Domar, y en el modelo AK, la ratio v es constante.

El modelo AK asume que hay una relación lineal en el producto y el stock de capital:

$$Y = AK.$$

En este modelo el crecimiento sostenido a largo plazo es posible. De hecho, siendo $k = K/L$,

$$k' = (sA + 1 - \delta)k.$$

Por ello, si $sA + 1 - \delta > 1$ (es decir, $sA > \delta$), entonces k crece indefinidamente, como muestra la Fig. 1.

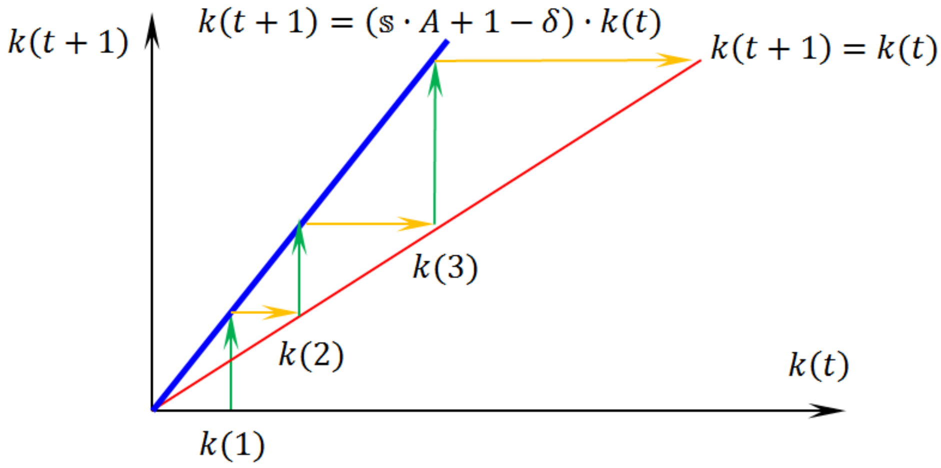

Fig. 1. Crecimiento sostenido en el modelo AK

Una justificación del modelo AK es que la acumulación de capital genera, mediante el aprendizaje práctico, un progreso técnico que impide la caída de la productividad del capital. Las externalidades del conocimiento también pueden explicar el crecimiento sostenido a largo plazo.

El modelo AK no distingue entre progreso tecnológico (crecimiento de A) y acumulación de capital (crecimiento de K).

Domar, Evsey D. (1946): "Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment", Econometrica 14, 137-147.

Harrod, Roy F. (1939): "An Essay in Dynamic Theory", Economic Journal 49, 14-33.

Solow, Robert M. (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth." Quarterly Journal of Economics 70, 65-94.

Swan, Trevor W. (1956): "Economic Growth and Capital Accumulation", Economic Record 32, 334-361

2. El modelo de Frankel (1962)

La economía se compone de m empresas. Cada empresa i dispone de tecnología Cobb-Douglas según la función de producción

$$Y_i = A\, H\, K_i{}^{\alpha}\, L_i{}^{1-\alpha}.$$

Esta formulación incluye un término H interpretado como un modificador del desarrollo. El valor de H representa el nivel de desarrollo de la economía. Este nivel incorpora una externalidad positiva para la producción Y_i realizada por la empresa i cuando esta utiliza K_i unidades de capital material y L_i unidades de factor trabajo. El término A engloba la tecnología común disponible para todas las empresas. Desde la perspectiva de una empresa, H se considera un parámetro porque, por sí sola, la empresa no es capaz de alterar el nivel de desarrollo de la economía.

Supongamos que la empresa i utiliza la proporción π_i de todos los factores de la economía: $K_i = \pi_i K$ y $L_i = \pi_i L$, donde K es el stock total de capital material y L es la cantidad total de trabajo. Así pues, la producción total Y es

$$Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i = \sum_{i=1}^{m} AHK_i{}^{\alpha} L_i{}^{1-\alpha} = AH \sum_{i=1}^{m} K_i{}^{\alpha} L_i{}^{1-\alpha} = AH \sum_{i=1}^{m} \pi_i{}^{\alpha} K^{\alpha} \pi_i{}^{1-\alpha} L^{1-\alpha} =$$

$$= AH \sum_{i=1}^{m} \pi_i K^{\alpha} L^{1-\alpha} = AH\, K^{\alpha} L^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{m} \pi_i = AHK^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

Este análisis conduce a la siguiente función de producción agregada.

- **Función de producción agregada** $\quad Y = AHK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ y $H > 0$

El modificador de desarrollo H depende del nivel de capital per cápita, que puede considerarse un indicador de desarrollo: cuanto mayor sea la cantidad de capital por trabajador en una economía, más desarrollada estará esa economía.

- **Nivel de desarrollo** $\quad H = \left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma}$

Tras insertar esta definición del modificador en la función de producción,

$$Y = AHK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma} K^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{\alpha+\gamma}L^{1-\alpha-\gamma}.$$

Cuando $\alpha + \gamma = 1$, la función de producción resultante es la del modelo AK: $Y = AK$. En este caso, cada empresa estaría dotada de una función de producción Cobb-Douglas, como en el modelo de Solow y Swan, pero la economía en su conjunto está dotada de una función de coeficiente fijo, como en el modelo de Harrod y Domar.

El resto del modelo de Frankel sigue al modelo básico. Para simplificar, sea $\delta = 0$.

- **Equilibrio macroeconómico** $\quad S = I$
- **Función de ahorro agregado** $\quad S = sY$ con $0 < s < 1$
- **Acumulación de capital** $\quad K' = I + K$ o $\Delta K = I$

Combinando las ecuaciones anteriores,

$$I = \Delta K \Rightarrow S = \Delta K \Rightarrow sY = \Delta K \Rightarrow \frac{sY}{L'} = \frac{K' - K}{L'} \Rightarrow \frac{sY}{(1+n)L} = \frac{K'}{L'} - \frac{K}{(1+n)L}.$$

En suma,

$$\frac{s}{1+n} y = k' - \frac{1}{1+n} k\,.$$

Por tanto,

$$\frac{s}{1+n}y \; = k' - k + k - \frac{1}{1+n}k \; = \Delta k + \frac{n}{1+n}k.$$

Como resultado,

$$\Delta k = \frac{\mathbb{s}}{1+n}y - \frac{n}{1+n}k$$

y

$$g_k = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\mathbb{s}}{1+n}\frac{y}{k} - \frac{n}{1+n}.$$

Por otra parte,

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha+\gamma}L^{1-\alpha-\gamma}}{L} = A\frac{K^{\alpha+\gamma}}{L^{\alpha+\gamma}}\frac{L^{1-\alpha-\gamma}}{L^{1-\alpha-\gamma}} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha+\gamma} = Ak^{\alpha+\gamma}$$

en vista de lo cual

$$g_k = \frac{\mathbb{s}}{1+n}\frac{y}{k} - \frac{n}{1+n} = \frac{sA}{1+n}k^{\alpha+\gamma-1} - \frac{n}{1+n}.$$

Cuando $\delta = 0$, la primera parte de la expresión anterior se cumple en el modelo de Solow y Swan:

$$g_k = \frac{s}{1+n}\frac{y}{k} - \frac{n}{1+n} = \frac{s}{1+n}\frac{f(k)}{k} - \frac{n}{1+n}.$$

En este último caso,

$$\frac{\partial g_k}{\partial k} = \frac{s}{1+n}\frac{\partial(f(k)/k)}{\partial k} < 0$$

porque $\frac{\partial(f(k)/k)}{\partial k} < 0$ ($f(k)/k$ es una función decreciente de k). Esto significa que $\frac{\partial g_k}{\partial k} < 0$: a medida que k crece, la tasa a la que k varía es cada vez menor y converge a cero (el estado estacionario).

A diferencia de este resultado, en el modelo de Frankel,

$$\frac{\partial g_k}{\partial k} = (\alpha + \gamma - 1)\frac{\mathbb{s}A}{1+n}k^{\alpha+\gamma-2}.$$

Si $\alpha + \gamma < 1$, la dinámica de k es igual que en el modelo de Solow y Swan, ya que en este caso $\frac{\partial g_k}{\partial k} < 0$. Si $\alpha + \gamma = 1$, entonces k se acumula a una tasa constante (no necesariamente cero). Y si $\alpha + \gamma > 1$, cuanto mayor sea el capital per cápita acumulado, mayor será la tasa a la que se acumula.

Dado que $y = Ak^{\alpha+\gamma}$, y que A, α, y γ son constantes,

$$g_y \approx (\alpha + \gamma)g_k.$$

En resumen, $g_k > 0$ implica $g_y > 0$. Por consiguiente, es posible un crecimiento sostenido de la producción per cápita (como en el modelo Harrod y Domar pero a diferencia del modelo Solow y Swan).

Frankel, Marvin (1962): “The Production Function in Allocation of Growth: A Synthesis”, American Economic Review 52, 995-1022.

3. El modelo de Romer (1990)

Existen cuatro factores de producción.

- **Factor de producción trabajo** L designa la cantidad de factor trabajo
- **Bienes de capital** K_i es la cantidad de bienes de capital i
- **Tecnología** Representada por la cantidad A de bienes de capital disponibles
- **Capital humano** H designa la cantidad de capital humano

El capital consiste en bienes materiales. La tecnología se interpreta como un componente no rival en la producción: cuando alguien utiliza la tecnología, todos los demás también pueden utilizarla. Puede considerarse que la tecnología es conocimiento disponible libremente.

El capital humano se considera un componente rival en la producción. Una parte H_Y del capital humano H se utiliza para producir bien, mientras que el resto $H_A = H - H_Y$ se emplea para mejorar la tecnología en el sector de la investigación de la economía.

Se asume que cada bien de capital tiene el mismo coste de producción y la misma productividad. Por esta razón, se asume que se produce la misma cantidad Q de cada bien de capital. Por tanto, la cantidad total K de bienes de capital en la economía es

$$K = A\mathrm{Q}.$$

El modelo consta de las ecuaciones que se enumeran a continuación (se supone que la tasa de depreciación de todo bien de capital es $\delta = 0$).

- **Función de producción agregada** $Y = {H_Y}^{\alpha} L^{\beta} (A\, \mathrm{Q}^{1-\alpha-\beta})$ con $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$
- **Equilibrio macroeconómico** $S = I$
- **Función de ahorro agregado** $S = \mathbb{s}\, Y$ con tasa de ahorro $0 < \mathbb{s} < 1$
- **Acumulación de capital** $I = \Delta K$
- **Dinámica del cambio tecnológico** $\Delta A = \phi\, H_A\, A$ con $\phi > 0$

La última ecuación describe el proceso de creación de conocimiento genérico (factor no rival). Afirma que el cambio tecnológico depende:

- de la productividad ϕ de los investigadores,
- del capital humano H_A empleado en actividades de investigación y
- de la tecnología existente A.

Asumiendo que

- el capital humano H,
- el capital humano empleado en la producción H_Y,
- el trabajo L y
- la cantidad Q producida de cada bien de capital

permanecen constantes, se deduce de $Y = A\, {H_Y}^{\alpha} L^{\beta}\, \mathrm{Q}^{1-\alpha-\beta}$ que la tasa de variación de la producción es igual a la tasa de variación de la tecnología. Es decir,

$$g_Y = g_A.$$

La ecuación del cambio tecnológico $\Delta A = \phi\, H_A\, A$ implica $g_A = \frac{\Delta A}{A} = \phi\, H_A$. La conclusión final es que

$$\boxed{g_Y = \phi\, H_A\, .}$$

Interpretación: <u>la tasa de crecimiento de la producción es proporcional tanto al capital humano H_A dedicado a la investigación</u> (para aumentar el acervo de conocimientos) <u>como a la productividad ϕ de los investigadores</u> (conocimiento generado por investigador).

Si se supone que la población se mantiene constante, entonces $g_y = g_Y$: producción y producto per cápita crecen a la misma tasa. Como resultado, $g_y = \phi\, H_A$ y así la prosperidad puede sostenerse simplemente invirtiendo en la acumulación de conocimiento.

Romer, Paul (1990): "Endogenous Technological Change", Journal of Political Economy 98, 71-102.