Dinámica Macroeconómica · 2025-26

Lista 3 de ejercicios

INSTRUCCIONES

- Responde **SIETE** apartados de preguntas diferentes (los apartados se identifican mediante números romanos). Si una pregunta no tiene apartados, se responde a toda la pregunta.
- Escribe las respuestas a mano en papel. La caligrafía debe ser inteligible.
- No hace falta escribir el enunciado de las preguntas: basta con identificar la pregunta y el apartado.
- Separa el final de una respuesta del principio de otra con una línea horizontal de lado a lado del papel.
- Haz un documento pdf de las respuestas, escaneándolas o fotografiándolas. Si un documento es demasiado grande (en MBs) para ser enviado por correo electrónico, haz varios.
- La primera página del pdf ha de ser una portada con la siguiente información: nombre y apellidos, asignatura, número de lista de ejercicios, enumeración de las preguntas y apartados respondidos, y fecha.
- Nombra cada pdf de la siguiente manera

  Ejercicios_Dinamica_Macro_2025_Nombre_Apellido1_Apellido2_Lista_x_Parte_y_de_z.pdf

  donde 'x' es el número de lista (1, 2, 3), 'z' es el número total de pdfs con las respuestas de la Lista x e 'y' es cada una de las z partes.
- Envía los pdfs a aqa@urv.cat no después de las 23:59 del miércoles 31 de diciembre de 2025.
- La corrección de las respuestas será flexible y comprensiva, si bien errores graves e inexcusables en las respuestas serán valorados negativamente.

CONVENCIONES

En los siguientes ejercicios, si no se indica otra cosa, se asume que:

(i) hay un único bien;

(ii) el bien es acumulable un período, sin pérdida durante la acumulación;

(iii) si se presenta una función de producción se presume que el bien es producible;

(iv) en una función de producción, K es el stock total de capital y L es la cantidad total de factor trabajo ofrecido (o disponible, según el caso);

(v) cada período, la productividad marginal del factor trabajo según la función de producción es el salario que recibe el factor trabajo en el período;

(vi) cada período, la productividad marginal del factor capital según la función de producción es la remuneración que recibe el factor capital en el período;

(vii) el bien acumulado en un período t se llama 'capital' y en $t+1$ no se puede consumir (el capital sólo puede emplearse en producir);

(viii) los parámetros α, β y δ son números entre cero y uno;

(ix) los períodos de vida son consecutivos;

(x) las personas viven dos períodos y se llama 'joven' a quien se encuentra en su primer período de vida y 'mayor' a quien se encuentra en el segundo;

(xi) la función de utilidad en el primer período de vida es $u = c\,c'$, donde c es el consumo del bien en el primer período de vida y c' el consumo en el período siguiente;

(xii) la utilidad en el último período de vida coincide con el consumo en ese período;

(xiii) todos los miembros de un mismo grupo son idénticos entre sí;

(xiv) el apóstrofo " $'$ " indica el período temporal siguiente (por ejemplo, si c representa el consumo en un período, c' representa el consumo del siguiente período);

(xv) cuando se hace referencia a un gobierno, se presume que se constituyó previamente o sin coste, y que equilibria su presupuesto cada período;

(xvi) 'calcular el equilibrio general' significa calcular el equilibrio general de la economía, esto es, determinar el equilibrio de cada mercado en cada período (si hay n mercados, basta con calcular los equilibrios de $n-1$);

(xvii) la expresión "Hay dos grupos, G1(m) y G2(n)" significa que cada período nacen dos grupos de personas, el primero (el grupo G1) con m miembros idénticos y el segundo (el grupo G2) con n miembros idénticos; expresiones similares con más grupos se interpretan análogamente;

(xviii) si en algún enunciado falta información, añádela tú mismo/a, y si es ambigua, clarifícala tú mismo/a.

1. Financiación colectiva de una tecnología de almacenamiento

Hay dos grupos, $G1(n)$ y $G2(n)$. Cada miembro de G1 tiene dotación $(0, w)$ y cada miembro de G2 tiene dotación $(0, v)$, donde $w > v > 0$. Existe una tecnología de almacenamiento tal que, por cada unidad del bien acumulada en el período t por el joven i, en el período $t + 1$, de mayor, i tendrá la cantidad λ_t del bien, con $0 < \lambda_t < 1$.

La efectividad de la tecnología depende de las contribuciones de cada joven a su desarrollo. Si, en t, cada miembro de G1 aporta τ_{1t} unidades del bien para financiar y desarrollar la tecnología y cada miembro de G2 aporta τ_{2t} unidades, entonces $\lambda_t = \frac{\tau_{1t}+\tau_{2t}}{w+v}$. Determina, en el equilibrio general, qué parte de su dotación ahorra (y cuál aporta a la financiación de la tecnología) cada joven.

2. Tecnología de transferencia

Todo el mundo es igual, vive durante dos períodos y el bien sólo puede existir durante un período. Se descubre una tecnología que, sin coste, permite transferir una unidad del bien dos períodos hacia el futuro. Así, si un joven acumula una unidad del bien en el período t, utilizando la tecnología, esta unidad estará disponible para ser consumida (o nuevamente acumulada) en el período $t + 2$. ¿Tendría esta tecnología utilidad práctica? En particular, ¿acumularían bien los jóvenes?

3. Equilibrio con producción

Hay dos grupos, $G1(50)$ y $G2(50)$. La función de utilidad de todo joven es $u = \ln c + \beta \ln c'$. En G1 la dotación es $(0, 1)$. En G2 la dotación es $(2, 0)$. La función de producción cada período es $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, con el stock inicial K_1 positivo.

(i) Determina la ecuación en diferencias que establece la trayectoria del stock de capital.

(ii) Calcula un estado estacionario con stock de capital positivo.

(iii) Responde a (i) y (ii) si en cada período todo grupo tiene el 50% más de miembros que en el período anterior.

(iv) Responde a (i) y (ii) si, al inicio del segundo período, todo grupo pierde la mitad de mayores.

(v) Responde a (i) y (ii) si en el segundo período se destruye la mitad del stock de capital.

4. Sostenibilidad

Cada período nacen n personas idénticas. Si en t un joven acumula el stock k_t de capital, entonces en $t + 1$ estará disponible sólo el stock $(1 - \delta)k_t$. Toda persona dispone de una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. Se necesita capital para que el trabajo pueda contribuir a la producción del bien. Los jóvenes emplean todo su trabajo en la producción del bien. Empleando todo su trabajo para producir el bien, un joven en t consigue producir $a(1 - \delta)k_t$, donde $a > 0$ es una constante y k_t es el stock de capital que el joven acumuló en $t - 1$. Cada joven decide qué parte de la producción que realiza la consume y qué parte la acumula en forma de capital. El consumo de cada persona mayor en el período t coincide con la parte no depreciada del capital que ella misma acumuló en el período $t - 1$.

(i) Determina la ecuación que expresa la trayectoria de acumulación del capital y represéntala gráficamente.

(ii) Considera la siguiente modificación de la economía. Existe un recurso libre y gratuito X que es necesario para producir el bien. Sea x_t la cantidad de recurso existente en el momento t. Cada unidad de capital empleada en la producción conlleva la pérdida de α unidades de X. El recurso X tiene la capacidad de regeneración: si y_t representa la cantidad de X disponible una vez descontada la pérdida causada por el proceso de producción, entonces hay $y_t(1+\gamma)$ unidades del recurso en $t+1$, con $\gamma > 0$. Asumiendo que $\alpha = \delta$ y que $\gamma = \alpha/2$, determina el valor máximo $\bar{a}$ que puede alcanzar a para que el proceso productivo no agote X. ¿Cómo se ve afectado $\bar{a}$ por cambios en α?

5. Ciclos

Cada período nacen n personas idénticas. Las nacidas en un período impar tienen la dotación de factor trabajo $(1, 1)$: una unidad de trabajo de joven y una de mayor. Las nacidas en un período par tienen la dotación de factor trabajo $(2, 2)$. La función de producción en todo período es $Y = K\,L$. Cada factor de producción recibe como remuneración la mitad de su productividad marginal según la función de producción. Determina la ecuación que describe la trayectoria de acumulación del stock de capital y halla los estados estacionarios.

6. Independencia

Hay dos grupos, $\mathrm{G1}(2n)$ y $\mathrm{G2}(n)$. Cada miembro de G1 tiene la dotación de trabajo $(1, 2)$. Cada miembro de G2, la dotación de trabajo $(4, 2)$. La función de utilidad de un joven de G1 es $u = c(c')^{\beta}$. La función de utilidad de cada joven de G2 es $u = c\,c'$. La función de producción de la economía en cada período es $Y = K\,L$. Toda persona ofrece su trabajo, tanto de joven como de mayor. La remuneración del capital es la mitad de la productividad marginal del capital. La remuneración del trabajo es la mitad de la productividad marginal del trabajo. Se asume que, por arbitraje, el tipo de interés de un préstamo en t coincide con la remuneración del capital en $t+1$.

(i) Determina la ecuación que describe la trayectoria de acumulación del capital y represéntala gráficamente.

(ii) Imagina que los miembros de G2 se independizan y constituyen una economía propia, separada de la economía que formarían los miembros de G1. En cada economía se mantienen las dotaciones de los miembros de los respectivos grupos, la función de producción de la economía original y las reglas que determinan las remuneraciones de los factores. Determina la ecuación que representa la trayectoria de acumulación del capital de cada economía y compárala con la obtenida en el apartado (i) para juzgar si a alguno de los grupos le conviene la secesión.

(iii) Responde a (i) y (ii) si la función de producción es $Y = K^{1/2}L^{1/2}$(pero ahora la remuneración de cada factor coincide con su productividad marginal).

7. Equilibrio con tecnología de almacenamiento imperfecta

Hay dos grupos, $\mathrm{G1}(n)$ y $\mathrm{G2}(n)$. Cada miembro de G1 tiene dotación (v, w) y cada miembro de G2 tiene dotación (w, v), donde $w > v > 0$. Existe una tecnología tal que, por cada unidad del bien que un joven acumule en el período t, dispondrá de λ unidades del bien en el período $t+1$, donde $0 < \lambda < 1$. Asumiendo que existe un mercado de préstamos del bien, calcula el equilibrio general.

8. Globalización

Hay dos economías, E1 y E2. En ambas, cada período: la función de producción es $Y = 2K + L$; nacen n personas idénticas; y cada factor de producción se remunera según su productividad marginal en la función de producción. En E1, en todo período, la dotación de trabajo es $(2, 1)$ y cada joven tiene función de utilidad $u = c^{\beta} c'$. En E2, en todo período, la dotación de trabajo es $(1, 0)$ y cada joven tiene función de utilidad $u = c\,(c')^{\beta}$.

(i) Para cada economía, determina la ecuación que describe la trayectoria de acumulación del stock de capital y el stock de capital en todo estado estacionario.

(ii) Los miembros de ambas economías se emparejan y cada miembro de E1 debe transferir $1/8$ unidades de capital a su pareja de E2. Calcula, sólo en E2, la ecuación que describe la trayectoria de acumulación del stock de capital y el stock de capital en todo estado estacionario. Sobre la base de los resultados, haz un análisis crítico de la transferencia como medida de política económica para contribuir a la prosperidad de E2.

(iii) Calcula la ecuación que describe la trayectoria de acumulación del stock de capital y el stock de capital en todo estado estacionario si ambas economías se integraran y formaran una sola.

9. Capital para siempre

El bien puede acumularse indefinidamente. Cada período hay un determinado número de personas idénticas. La función de utilidad de cada joven es $u = c\,c'$. Cada persona tiene, como dotación, una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. Cada unidad de trabajo produce α unidades del bien. Cada unidad de capital que un joven acumula se transforma en β unidades del bien en el período siguiente. Del total de capital acumulado en el período t se preserva la proporción δ para el período $t+1$. Este capital remanente es indistinguible del bien que se produce en $t+1$ y se distribuye a partes iguales entre los jóvenes del período $t+1$.

Redacta tú mismo/a las preguntas a responder y respóndelas. En un caso, supón que la población es siempre constante (con n miembros) y en otro que crece a la tasa $n > 0$.

10. Capital humano

Cada período nacen n personas idénticas. El bien no puede acumularse pero sí producirse combinando los factores trabajo y capital humano. La función de producción de la economía en cada período es $Y = H^{\alpha} L^{1-\alpha}$, donde H es el capital humano total en el período.

Todo joven dispone de una unidad de trabajo de joven y ninguna unidad de mayor. Cada joven decide qué parte l de su trabajo dedica a la producción del bien y qué parte $1 - l$ destina a la formación de capital humano. La función de formación de capital humano h a partir del trabajo $1 - l$ destinado a formarlo es $h = \theta(1-l)$, donde $\theta > 1$ es una constante. Formar capital humano tiene un coste: el coste, en unidades del bien, de crear una unidad de capital humano es una constante $\gamma > 0$. El capital humano acumulado de joven se puede utilizar de mayor para producir el bien. La remuneración de cada unidad de capital humano es la productividad marginal del capital humano. La retribución de cada unidad de trabajo es la productividad marginal del trabajo.

Redacta tú mismo/a las preguntas a responder y respóndelas.

11. Capital y gente

Cada período nacen n personas idénticas. La función de producción cada período es $Y = KL$. Todo joven tiene la función de utilidad $u = c\, c'n'$, donde n' es el número de hijos que cada joven decide tener. Toda persona tiene una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. La unidad de trabajo de cada período t se vende a cambio de un salario ω_t.

Cada joven decide cuántos hijos tener y qué parte del salario acumular en forma de capital. El coste de tener un hijo es $\gamma > 0$ unidades del bien. El capital acumulado de joven en t se vende de mayor en $t+1$ a cambio de un precio σ_{t+1}. Cada período la proporción de la producción total destinada a pagar salarios es la misma que la proporción destinada a remunerar el capital.

Determina el equilibrio general de cada período, las trayectorias de acumulación de capital y de crecimiento de la población, y los estados estacionarios.

12. Comercio internacional

Hay dos economías, E1 y E2. Hay dos bienes, C y D. En cada economía y período hay n personas idénticas, que viven un período. Toda persona tiene una unidad de trabajo, que puede destinar a producir cualesquiera de los dos bienes. La economía E1 puede exportar bien C a E2 a cambio de bien D (y E2 puede exportar D a cambio de C). Una unidad de C se intercambia siempre por una unidad de D.

En E1: (i) la cantidad l de trabajo puede producir γl unidades del bien C, donde $\gamma > 1$; y (ii) la cantidad l de trabajo puede producir l unidades del bien D.

En E2: (i) la cantidad l de trabajo puede producir γl unidades del bien D; y (ii) la cantidad l de trabajo puede producir l unidades del bien C.

La función de utilidad de cada miembro de E1 es $u_1 = c_1\left(d_1 + \tilde{d}\right)^2$, donde c_1 es el consumo que del bien C (necesariamente producido en E1), d_1 es el consumo del bien D producido en E1 y $\tilde{d}$ es el consumo del bien D importado de E2. La función de utilidad de cada miembro de E2 es $u_2 = (c_2 + \tilde{c})^2 d_2$, donde d_2 es el consumo del bien D (necesariamente producido en E2), c_2 es el consumo del bien C producido en E2 y $\tilde{c}$ es el consumo del bien C importado de E1.

(i) Determina el equilibrio general de cada economía si las economías son autárquicas.

(ii) Determina el equilibrio general de cada economía si existe comercio internacional y evalúa en qué economía se gana proporcionalmente más en el tránsito de economía cerrada a abierta.

(iii) Sugiere otra pregunta a responder.

13. Convergencia y divergencia

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c^{\beta} c'$, donde $\beta > 1$. La dotación de toda persona es una unidad de trabajo de joven. La función de producción cada período es $Y = K^{1/2} L^{1/2}$.

(i) Determina la ecuación de acumulación de capital y encuentra a los estados estacionarios.

(ii) Hay una segunda economía idéntica a la anterior, excepto por tener $Y = K^{2/3} L^{1/3}$. Las personas mayores de la primera economía tienen la posibilidad de llevar parte de su capital a la otra economía sin coste alguno. Calcula qué parte del stock de capital de la primera economía se transfiere a la segunda en los estados estacionarios.

14. Ciclo demográfico

En cada período impar nacen n personas idénticas. En cada período par nacen $2n$ personas idénticas. Cada persona tiene una unidad de trabajo de joven. La función de utilidad de todo joven es $u = c\, c'$. La función de producción cada período es $Y = K\, L$. La producción del bien hecha en cada período se distribuye igualitariamente entre todas las personas vivas en el período.

Determina la ecuación de acumulación de capital e identifica a los estados estacionarios.

15. Gobierno y acumulación

Hay un único bien que no se puede producir pero sí acumular un período. Cada período nacen n personas idénticas. La dotación de toda persona es una unidad del bien de joven. La función de utilidad de todo joven es $u = c\, c'$. La cantidad de bien que se acumula tiene una tasa de depreciación del 25%: si se acumulan k unidades del bien en t sólo se dispone unidades $3k/4$ en $t + 1$. Hay un gobierno que establece un impuesto cada período de τ unidades del bien.

(i) El gobierno puede acumular el impuesto sin sufrir ninguna depreciación. El impuesto en t lo pagan los que nacen en t. La recaudación del impuesto en t se distribuye igualitariamente en $t + 1$ entre los que nacieron en t. Obtén el volumen de capital que acumula cada persona.

(ii) Obtén el volumen de capital que acumula cada persona si el gobierno distribuye la recaudación del impuesto hecha en t de manera igualitaria entre los vivos en t nacidos en $t - 1$. ¿Cuál de las dos políticas, la de (i) o la de (ii), maximiza el bienestar de las personas?

(iii) En la situación descrita en (i), encuentra el valor de τ que maximiza la utilidad de los jóvenes y el valor que maximiza la utilidad de los mayores.

16. Familias

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c\, (c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La dotación de toda persona es una unidad de trabajo de joven. El salario que se obtiene del trabajo puede emplearse en consumir, acumular capital o tener hijos. El coste (en términos del bien) por hijo es $\gamma > 0$.

Cada persona nacida en t tiene acceso, en $t + 1$, a la función de producción $y_{t+1} = (k_{t+1})^{\alpha} (n_{t+1})^{\beta}$, donde k_{t+1}es el capital que la persona acumuló en el período t y n_{t+1} es el número de hijos que la misma persona tuvo en el período t. Una interpretación es que los trabajadores que una persona contrata de mayor son sus propios hijos. Para todo período t, el pago en salarios que hace cada persona i (nacida en el período anterior) es una proporción fija ϕ de la producción que realiza i mediante la función de producción. Determina la ecuación de acumulación de capital y la ecuación que establece la evolución del número de hijos.

17. Cambio de tecnología

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La dotación de toda persona es una unidad de trabajo de joven. La función de producción es $Y = K^{1/3}L^{2/3}$ en período impar y es $Y = K^{2/3}L^{1/3}$ en período par. Halla la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios.

18. Cambio de preferencias

En período impar nacen n personas idénticas que viven dos períodos consecutivos. En período par nacen $2n$ personas idénticas. La dotación de cada persona nacida en un período impar son dos unidades del bien de joven. La dotación de cada persona nacida en un período par es una unidad del bien de joven. La tasa de depreciación del bien que se acumula es δ. La función de utilidad de cada joven nacido en un período impar es $u = c\,c'$. La función de utilidad de cada joven nacido en un período par es $u = \ln c + \beta c'$, donde $\beta \neq 1$. Calcula el equilibrio general y la trayectoria de acumulación de capital.

19. Tema libre

Construye una economía que contenga algún elemento no considerado en los apuntes o ejercicios, propón preguntas relevantes a responder y halla sus respuestas.

20. Dotación variable

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La dotación de toda persona es una unidad de bien de joven. La tasa de depreciación del bien que se acumula es δ.

(i) Supón que cada joven tiene una unidad de bien de dotación y, además, tiene como dotación el capital que, en promedio, acumularon los jóvenes del período anterior. Determina cuánto capital acumula cada joven, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en todos los estados estacionarios.

(ii) Vuelve a responder las cuestiones de (i) si cada joven tiene como dotación únicamente la media del capital que acumularon los jóvenes del período anterior (supon que los jóvenes del período inicial tienen una unidad de bien como dotación).

(iii) En (i), imagina que un dictador benevolente pudiera elegir por cuenta de las personas el capital que acumulan. Vuelve a responder las cuestiones de (i) si el objetivo del dictador fuese maximizar la utilidad de cada joven en cada período.

(iv) Vuelve a responder a (iii) asumiendo la situación descrita en (ii) en vez de la descrita en (i).

21. Retribuciones proporcionales

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La función de producción cada período es $Y = K^{\alpha}L^{\theta}$, donde α y θ son constantes positivas. Cada joven tiene, como dotación, x unidades de trabajo; los mayores no tienen dotación. En todo período, el cociente entre la remuneración ω del trabajo y la remuneración σ del capital es una constante a; esto es, $\omega = a\sigma$. Además, en cada período, $Y = \sigma K + \omega L$.

(i) Determina cuánto capital acumula cada joven, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en todos los estados estacionarios.

(ii) Responde (i) si, en vez de tener $\omega = a\sigma$ se cumple $\sigma K = \omega L$.

(iii) Vuelve a responder (i) si el capital tiene una tasa de depreciación δ.

22. Producción acotada

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La función de producción cada período es $Y = K(1-K)L$. De joven se tiene como dotación una unidad de trabajo; de mayor, no se tiene dotación. En todo período, la remuneración ω del trabajo y la remuneración σ del capital satisfacen $Y = \sigma K + \omega L$ y $\sigma K = \omega L$.

(i) Determina cuánto capital acumula cada joven, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en todos los estados estacionarios.

(ii) Vuelve a responder (i) si, en vez de tenerse $\sigma K = \omega L$ se tiene $\omega = a\sigma$, con $a > 0$ constante.

23. Tecnologías privativas

Hay dos grupos, G1(n) y G2(n). Cada persona tiene, como dotación, una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c^{\beta}c'$.

Cada período, los miembros de G1 tienen, colectivamente, acceso a la función de producción $Y_1 = {K_1}^{1/2}L^{1/2}$, donde K_1 es el stock total de capital que acumularon los jóvenes de G1 en el período anterior y L es la cantidad total de trabajo en la economía en el período. Los miembros de G2 tienen, colectivamente, acceso a la función de producción $Y_2 = {K_2}^{1/3}L^{2/3}$, donde K_2 es el stock total de capital que acumularon los jóvenes de G2 en el período anterior y L es la cantidad total de trabajo de la economía en el período. Las remuneraciones de trabajo y capital son sus productividades marginales.

(i) Halla el capital que acumula cada joven de cada grupo, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en los estados estacionarios.

(ii) Vuelve a responder (i) si la cantidad total de trabajo se distribuye entre las dos funciones de producción de manera que: (a) $Y_1 = {K_1}^{1/2}{L_1}^{1/2}$, donde L_1 es la cantidad de trabajo empleado en la función de producción de G1 (L_1 puede incluir trabajo aportado por miembros de G2); (b) $Y_2 = {K_2}^{1/3}{L_2}^{2/3}$, donde L_2 es la cantidad de trabajo empleado en la función de producción de G2 (L_2 puede incluir trabajo aportado por miembros de G1); y (c) la remuneración del trabajo es la misma según las dos funciones de producción (condición de arbitraje de salarios).

24. Discriminación salarial

Hay dos grupos, G1(n) y G2(n). Cada persona tiene, como dotación, una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c^{\beta} c'$.

La función de producción es $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$. Los miembros de G1 reciben el doble de salario que los miembros de G2. El capital no se remunera.

(i) Halla el capital acumulado por cada joven de cada grupo, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores del stock total de capital en los estados estacionarios.

(ii) Vuelve a responder (i) si son los miembros de G2 los que reciben el doble de remuneración adicional que los de G1.

(iii) Vuelve a responder (i) si la remuneración del capital es la mitad de su productividad marginal.

25. ¿Hijos o capital?

Hay dos grupos, G1(m) y G2. Cada persona tiene, como dotación, dos unidades de trabajo de joven y ninguna de mayor. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c^{\beta} c'$.

Los miembros de G1 no pueden tener hijos, pero pueden acumular bien. Los miembros de G2 no pueden acumular bien, pero pueden tener hijos. Acumular capital no tiene coste y cada unidad acumulada en un período está disponible para ser consumida el período siguiente. Tener hijos tiene un coste de $\gamma > 0$ unidades de bien por hijo. Cada hijo transfiere una unidad de bien a su progenitor cuando este es mayor.

(i) Determina cuánto capital acumula cada joven de G1, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en los estados estacionarios.

(ii) Determina cuántos hijos tiene cada joven de G2, la trayectoria de la población de G2 y la población de G2 en todos los estados estacionarios.

26. Vida larga y vida corta

Hay dos grupos, G1(n) y G2(m). Los miembros de G1 viven dos períodos; los de G2, viven uno. Los miembros de G1 no tienen dotación, ni de jóvenes ni mayores. Cada miembro de G2 tiene, como dotación, $x > 0$ unidades de trabajo de joven. La función de utilidad de cada joven de G1 es $u = c^{\beta} c'$, donde $\beta > 0$. La utilidad de los miembros de G2 coincide con su consumo.

Cada período, la función de producción es $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$. El salario es la productividad marginal del trabajo según la función de producción. La producción que resta para remunerar el capital se reparte igualitariamente cada período entre todos los miembros de G1.

Determina cuánto capital acumula cada joven de G1, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en los estados estacionarios.

27. Función de utilidad CES

Hay dos grupos, G1(n) y G2(n). La dotación de trabajo de cada miembro de G1 es $(x, 0)$. La dotación de trabajo de cada miembro de G2 es $(0, x)$. La función de producción es $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. La función de utilidad de todo joven es $u = \left(c^{\beta} + c'^{\beta}\right)^{1/\beta}$, donde $\beta > 0$ es una constante.

Determina cuánto capital acumula cada joven, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en los estados estacionarios.

28. Gasto público y producción

Cada período nacen n personas idénticas, con dotación de trabajo (1,0). La función de utilidad de todo joven es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$. La función de producción cada período es $Y = \tau\, n\, K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde τ es un impuesto que paga cada joven de cada período.

(i) Calcula el capital que acumula cada joven, la trayectoria de acumulación del stock total de capital y los valores positivos del stock total de capital en los estados estacionarios.

(ii) Responde a (i) si $Y = n\, K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (no se pagan impuestos).

(iii) Responde a (i) si τn, en vez de ser la recaudación de un impuesto, se obtiene con una emisión de bonos emitidos por el gobierno cada período (y vencimiento al período siguiente) y el pago de los bonos al vencimiento se hace mediante la refinanciación de la deuda con bonos.

(iv) Responde a (i) si $Y = n\, K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (no se pagan impuestos) y la función de producción es una de elasticidad de sustitución constante (CES): $Y = (\alpha\, K^{\gamma} + (1-\alpha)L^{\gamma})^{1/\gamma}$.

29. Ocio y producción

Cada período nacen n personas idénticas, con dotación de trabajo (1,0). Esta unidad puede emplearse en producir (a cambio de un salario) o en actividades de ocio. La función de utilidad de todo joven es $u = c\,c'e$, donde e es la cantidad de factor trabajo que el joven dedica a la producción. Todo joven puede acumular su salario en forma de capital. Los ingresos de los mayores proceden de la venta del capital acumulado en el período anterior. En cada período, la función de producción es $Y = K^{\alpha}L$, donde $\alpha > 0$ es una constante. En todo período, $Y = \sigma K + \omega L$ y $\omega L = 2\sigma K$.

Determina qué fracción de su dotación de trabajo emplea en ocio un joven, el volumen de capital que acumula cada joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en los estados estacionarios y tanto la producción per cápita como la producción por unidad de trabajo en los estados estacionarios.

30. Tres períodos con producción

Cada período nacen n personas idénticas, que viven tres períodos. En el primer período la función de utilidad es $u = c\,c'$. En el segundo, $u' = c'c''$. La dotación es una unidad de factor trabajo de joven. La función de producción cada período es $Y = K^{1/2}L^{1/2}$.

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital.

(ii) Identifica los estados estacionarios.

31. Globalización

Hay dos economías, E1 y E2. En cada una de ellas hay n personas idénticas. Cada uno de ellas vive dos períodos. Se tiene una unidad de trabajo de joven. Los jóvenes pueden acumular en forma de capital la remuneración por la venta de su trabajo. Este capital acumulado en un período sólo puede utilizarse (para producir) en el período siguiente.

En E1 la función de utilidad de todo joven es $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $0 < \beta < 1$, y la función de producción es $Y = K^{1/2}L^{1/2}$. En E2 la función de utilidad de todo joven es $u = c\,c'$ y la función de producción es $Y = KL$. En E1 la retribución a los factores de producción es igual a la productividad marginal del factor. En E2 la retribución total que recibe el capital es el doble de la retribución total que recibe el trabajo.

(i) Determina, para cada economía, el volumen de capital que acumula cada joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Supón que los miembros de E1 pueden, de jóvenes, trabajar en E2, pero el capital que acumulan se empleará en E1. Calcula esa proporción de la población de E1 trabajaría en E2 en cada estado estacionario y compara los precios de los factores con los obtenidos en (i).

(iii) Supón que los miembros de E1 tienen que trabajar en E1 de jóvenes pero, de mayores, pueden vender su capital en E2. Calcula qué proporción de la población de E1 invertiría su capital en E2 en cada estado estacionario y compara los precios de los factores con los obtenidos en (i).

32. Producción

Cada período nacen n personas idénticas, con dotación de trabajo $(x, 0)$. La función de utilidad de todo joven es $u = c^{\beta}c'$, donde $\beta > 1$. La función de producción cada período es $Y = \tau\, n\, K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde τ es un impuesto que paga cada joven de cada período. La función de producción en todo período es $Y = A\, K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde A es una constante positiva.

(i) Calcula el volumen de capital que acumula cada joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Explica y determina cómo afecta un cambio de A al capital que acumula cada joven, a la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, a los valores del capital total en todos los estados estacionarios y a la producción per cápita en los estados estacionarios.

33. Hijos y capital

La función de producción agregada cada período es $Y = 2\,K^{1/2}L^{1/2}$. Las personas viven tres períodos. En el primer período son niños y no toman decisiones económicas. En el segundo, la función de utilidad es $u = c\,c'\,n'$, donde n' es el número de hijos que se decide tener en el período y que son niños en el período. En el tercer período la utilidad coincide con el consumo del período. Toda persona tiene una unidad de factor trabajo en el segundo período de vida.

Obtén las trayectorias de acumulación del capital total y de la población, y sus estados estacionarios.

34. Brecha en la acumulación

Cada período nacen n personas idénticas. El bien puede acumularse, pero sólo puede utilizarse dos períodos después: la cantidad de bien que se acumule en el período t sólo es utilizable en $t+2$. Cada joven dispone de una unidad de trabajo y tiene como función de utilidad $u = c\,c'$. La función de producción agregada en todo período es $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde K es la cantidad de capital acumulado dos períodos atrás. En el primer período existe una cantidad de capital K_1 disponible.

(i) Calcula el capital que acumula cada joven, la trayectoria de acumulación de la cantidad total de capital, los valores del capital total en todos los estados estacionarios y la producción per cápita en los estados estacionarios.

(ii) Explica cómo un cambio α afecta a las respuestas de (i).

35. Producción cíclica

Cada período nacen n personas idénticas. Cada joven dispone de una unidad de trabajo y tiene como función de utilidad $u = c\,c'$. La función de producción agregada es, en período par, $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$ y, en período impar, $Y = 3K^{1/3}L^{1/3}$.

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital.

(ii) Identifica los estados estacionarios.

36. Dos economías

Hay dos economías, A y B, y un único bien, que puede acumularse. En cada economía y período nacen n personas y tienen como dotación una unidad de factor trabajo de jóvenes. Los jóvenes de A tienen función de utilidad $u = c(c')^{\beta}$, donde β es una constante positiva. Todos los jóvenes de B tienen función de utilidad $u = c\,c'$. La función de producción agregada de ambas economías es, cada período, $Y = K^{1/2}L^{1/2}$. Los mayores de A son libres de vender en la economía que quieran, sin coste adicional, el capital acumulado de jóvenes (los de B sólo pueden venderlo en B).

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital de cada economía e identifica los estados estacionarios.

(ii) ¿Qué proporción de los mayores de A venden su capital en B?

(iii) Vuelve a responder la pregunta (i) si los mayores de B pueden vender su capital en la economía que quieran.

37. Acumulación y préstamos

Cada período nacen n personas idénticas, que viven tres períodos consecutivos y tienen dotación de bien $(1, 0, 0)$. En el primer período de vida la función de utilidad es $u = c(c')^{\beta}$. En el segundo, $u' = c'c''$. En el primer período puede acumularse bien por un período; el bien se deprecia totalmente en el segundo período si no se consume. Acumular x unidades del bien en el primer período implica disponer de λx unidades en el segundo. Calcula el equilibrio general de la economía y cuánto acumula cada persona.

38. Población y producción

Hay un único bien, Y, que no se puede acumular. Todas las personas son idénticas y viven dos períodos. En el primer período son económicamente irrelevantes. En el segundo deciden cuántos hijos tener. El bien puede ser producido con trabajo L. La función de producción agregada cada período es $Y = A\, L^{\alpha}$, donde α y A son constantes positivas. Cada persona tiene una unidad de trabajo en el segundo período de vida y recibe como renta el valor de la producción per cápita. La función de utilidad en el segundo período de vida es $u = c^{\beta} n^{\delta}$, donde β y δ son constantes positivas, c es la cantidad de bien consumida en el segundo período y n es el número de hijos que ha elegido tener. Tenencia y crianza de hijos tienen un coste fijo de $\gamma > 0$ unidades de bien por hijo. Calcula la trayectoria de acumulación de la población y de la producción, y sus estados estacionarios.

39. Migración

Existen dos economías con las características descritas en §38. La única diferencia es que α es mayor en una que en la otra. Calcula cuántas personas han de migrar de una economía a otra para que, en el estado estacionario, halla la misma población en ambas economías.

40. Dos economías

Existen dos economías con las características descritas en §38. La única diferencia es que en la segunda economía $Y = A\, L^{\lambda\alpha}$ y el valor de γ es el doble que en la primera economía. Calcula el valor de λ que hace que, en el estado estacionario, exista la misma población en ambas economías.

41. Coste de los hijos

En la economía de §38, γ es una función $\gamma(n)$ del número de hijos, tal que $d\gamma/dn > 0$ y $d^2\gamma/dn^2 > 0$. Halla la función que relaciona n con el producto per cápita y represéntala gráficamente.

42. Trabajo

Hay dos grupos, G1(m) y G2(n). La función de utilidad de todo joven es $u = c\, c'$. El bien no es acumulable, pero puede producirse con trabajo. La dotación de trabajo de cada miembro de G1 es $(0, 2)$ y la de cada miembro de G2 es $(0, 1)$. Cada unidad de trabajo de un miembro de G1 produce $\lambda > 0$ unidades del bien. Cada unidad de trabajo de un miembro de G2 produce 3λ unidades del bien. Calcula el equilibrio general.

43. Acumulación de capital

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de joven es $u = c^{\beta} c'$, donde β es una constante positiva. Toda persona dispone de una unidad de trabajo de joven. La función de producción agregada en todo período es $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$. Cada período, toda la producción se destina a retribuir trabajo y capital. La retribución total del trabajo (salario multiplicado por la cantidad de trabajo) es el doble de la retribución total del capital (precio del capital por la cantidad de capital).

Determina la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria.

44. Hijos y pensiones

Hay un único bien, Y, que no se puede acumular. El bien puede ser producido con trabajo. La función de producción agregada cada período es $Y = A\,L^{\alpha}$, donde A es una constante positiva, α es un número entre cero y uno, y L es la cantidad total de trabajo en el período. Todas las personas son idénticas y viven tres períodos. En el primer período son económicamente inactivos. En el segundo tienen una unidad de trabajo y deciden cuántos hijos tener (las familias son monoparentales). Tener y criar hijos tiene un coste fijo de $\gamma > 0$ unidades de bien por hijo. Cada persona recibe en su segundo período de vida la cantidad de bien Y/L. En el tercer período de vida una persona sólo consume y su fuente de bien es una pensión de p unidades de bien que recibe de cada hijo que tuvo en el segundo período. La función de utilidad en el segundo período de vida es $u = c\,c'n$, donde n es el número de hijos que la persona decide tener.

(i) Determina la trayectoria de crecimiento de la población y los estados estacionarios de esa trayectoria.

(ii) Determina la trayectoria de crecimiento de la producción per cápita y los estados estacionarios de esa trayectoria.

45. Capital costoso

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c(c')^{\beta}$, donde β es una constante positiva. La dotación de trabajo es $(1, 0)$. La función de producción agregada en cada período es $Y = 2\,K^{1/2}L^{1/2}$. Existe una constante $\lambda > 0$ tal que acumular la cantidad $k + \lambda k$ de bien en un período permite dispone de la cantidad k de capital en el período siguiente.

Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria.

46. Tres períodos y producción

Cada período nacen n personas idénticas, que viven tres períodos consecutivos y tienen dotación de trabajo $(1, 0, 1)$. En el primer período de vida la función de utilidad es $u = c^2\,c'$. En el segundo, $u' = c'(c'')^2$. La función de producción agregada en cada período es $Y = K^{1/2}L^{1/2}$.

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria.

(ii) Vuelve a responder a (i) si los períodos pares nacen n personas y en los impares nacen $2n$.

47. Externalidades

Hay dos grupos, G1(m) y G2(n). El bien no puede acumularse ni producirse. La dotación de bien de los miembros de G1 es $(2, 1)$. La dotación de los miembros de G2 es $(1, 2)$. La función de utilidad de todo joven de G1 es $u_1 = c_1c_1' - c_2$, donde c_1 es el consumo de un joven de G1, c_1' es el consumo de un mayor de G1 y c_2 es el consumo de un joven de G2. La función de utilidad de todo joven de G2 es $u_2 = c_2c_2' + c_1$, donde c_2 es el consumo de un joven de G2, c_2' es el consumo de un mayor de G2 y c_1 es el consumo de un joven de G1.

Calcula el equilibrio general.

48. Hijos sin pensiones

En §44:

(i) vuelve a calcular lo que se pide si en el segundo período de vida, en vez de recibir una pensión de los hijos, se puede acumular bien para ser empleado en el tercer período;

(ii) determina la trayectoria de crecimiento de la población y los estados estacionarios de esta trayectoria si se puede tener hijos en el tercer período de vida y la función de utilidad en el tercer período es $u'' = c''n''$, donde n'' es el número de hijos tenidos en el tercer período.

49. Acumulación de capital

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c^{\beta}c'$, con $\beta > 0$. La dotación de trabajo es $(1, 0)$. La función de producción agregada en todo período es $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$. Cada período, toda la producción se destina a retribuir trabajo y capital. Responde una de las siguientes preguntas.

(i) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria si la retribución total del capital es α veces la retribución total del trabajo.

(ii) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esta trayectoria si la retribución total del trabajo es α veces la retribución total del capital.

(iii) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria si la retribución total del capital es $1 - \alpha$ veces la retribución total del trabajo.

(iv) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esta trayectoria si la retribución total del trabajo es $1 - \alpha$ veces la retribución total del capital.

(v) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria si la retribución total del capital es β veces la retribución total del trabajo.

(vi) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esta trayectoria si la retribución total del trabajo es β veces la retribución total del capital.

(vii) Obtén la trayectoria de acumulación del capital y los estados estacionarios de esa trayectoria si la retribución total del capital es $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ veces la retribución total del trabajo.

50. Trabajo, capital público y deuda

Cada período nacen n personas idénticas. La función de utilidad de todo joven es $u = c^{\beta}c'$, con $\beta > 0$. La dotación de trabajo es $(1, 0)$. La función de producción agregada en todo período es $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$.

Hay un gobierno. Cada período, el gobierno emite títulos que prometen pagar una unidad del bien en el período siguiente. Se puede comprar títulos pagando el precio de p unidades del bien por título. El mercado de deuda pública es competitivo: p es un precio que iguala oferta y demanda de títulos. La recaudación (en bien) de cada emisión se dedica a pagar la deuda del período anterior y a crear una cantidad fija K de capital, que se emplea en la producción del bien. Sólo el gobierno puede acumular el bien en forma de capital.

(i) Determina la trayectoria de acumulación de la deuda pública y los estados estacionarios de esta trayectoria.

(ii) Calcula el consumo de cada joven y de cada mayor si el stock de capital que provee al gobierno no se financia con deuda pública sino con un impuesto τ que pagan los jóvenes.

(iii) Responde a (ii) si el gobierno elige τ para maximizar la utilidad de los jóvenes.

51. Trabajo y producción sin préstamos

Hay dos grupos, G1(m) y G2(n). La dotación de trabajo de los miembros de G1 es $(1, 2)$. La dotación de los miembros de G2 es $(2, 1)$. La función de utilidad de todo joven de G1 es $u = c^{\beta}(c')^{1-\beta}$ y la función de utilidad de todo joven de G2 es $u = c^{1-\beta}(c')^{\beta}$, con $0 < \beta < 1$. No existe mercado de préstamos. La función de producción agregada cada período es $Y = \frac{1}{2}K^{1/3}L^{2/3} + \frac{1}{2}K^{2/3}L^{1/3}$.

(i) Comprueba que se cumple $Y = \sigma K + \omega L$.

(ii) Obtén la trayectoria de acumulación de capital total y calcula sus estados estacionarios.

52. Acumulación restringida

Hay dos grupos, G1(m) y G2(n). La dotación de trabajo de los miembros de G1 es $(3, 0)$. La dotación de los miembros de G2 es $(2, 1)$. La función de utilidad de todo joven de G1 es $u = c^{\beta}(c')^{1-\beta}$ y la función de utilidad de todo joven de G2 es $u = c^{1-\beta}(c')^{\beta}$, con $0 < \beta < 1$. La función de producción agregada cada período es $Y = (K^{\gamma} + L^{\gamma})^{1/\gamma}$, con $\gamma > 0$. Los miembros de G2 no acumulan capital. No existe mercado de préstamos.

(i) Comprueba que se cumple $Y = \sigma K + \omega L$.

(ii) Obtén la trayectoria de acumulación de capital total y calcula sus estados estacionarios.

53. Capital y política

Cada período nacen n^2 personas idénticas. La dotación de trabajo cada persona es $(n, 0)$. La función de utilidad de todo joven es $u = c^{\beta}(c')^{1-\beta}$, donde $0 < \beta < 1$. La función de producción agregada cada período es $Y = 6\,K^{1/2}L^{1/3}$. Hay un gobierno que se apropia del exceso de producción que queda después de remunerar capital y trabajo según sus productividades marginales. El gobierno considera dos políticas para dar uso a ese exceso.

- Política 1: acumular capital.
- Política 2: transferir el remanente a los individuos mayores.

Para cada política, determina la expresión que especifica la trayectoria de acumulación de capital total y sus estados estacionarios. En el caso de la política 2, analiza el efecto de cada una de las dos decisiones siguientes sobre la trayectoria de acumulación de capital y sus estados estacionarios.

- Decisión 1: el gobierno anuncia (en el período anterior a ejecutarla) la política 2.
- Decisión 2: el gobierno no anuncia la política 2.

54. Capital y política II

Igual que §53 con la siguiente diferencia: en la política 1, analiza el efecto de cada una de las dos siguientes decisiones sobre la trayectoria de acumulación de capital y sus estados estacionarios.

- Decisión 1: el gobierno anuncia (en el período anterior a ejecutarla) la política 1.
- Decisión 2: el gobierno no anuncia la política 1.

55. Capital y política III

Igual que §53 con la siguiente diferencia: cada período nacen n personas idénticas y cada uno de ellos tiene, de joven, la dotación de trabajo n^2.

56. Capital y política IV

Igual que §54 con la siguiente diferencia: cada período nacen n personas idénticas y cada uno de ellos tiene, de joven, la dotación de trabajo n^2.

57. Producción y tres períodos

Cada período nacen n personas idénticas, que viven tres períodos consecutivos. La dotación de trabajo de cada persona es (2, 0, 1). No existe mercado de préstamos. La función de utilidad de todo joven es $u = c^{\beta}(c')^{1-\beta}$ y la función de utilidad de todo adulto es $u' = (c')^{1-\beta}(c'')^{\beta}$, donde $0 < \beta < 1$, c es el consumo de joven, c' el consumo de adulto y c'' el consumo de mayor. La función de producción agregada cada período es $Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$.

Determina la trayectoria de acumulación de capital total y sus estados estacionarios.

58. Producción y tres períodos II

Igual que §57 con la diferencia que el bien se puede acumular dos períodos.

59. Producción, tres períodos y préstamos

Igual que §51 con la diferencia que existe mercado de préstamos.

60. Acumulación restringida y préstamos

Igual que §52 con la diferencia d que existe mercado de préstamos.

61. Gobierno y capital

Cada período nacen n personas, que viven tres períodos consecutivos. Se dispone de una unidad de trabajo en el primer período de vida y de ninguna en los otros períodos. La utilidad en el primer y segundo períodos es el producto del consumo en el período y del consumo en el período siguiente.

El bien se puede producir cada período $t \geq 2$ con la función de producción agregada $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$. En el período inicial, $Y = L$. Existe un gobierno que, cada período, recauda, como impuesto, el porcentaje τ del salario de cada trabajador. También cada período el gobierno paga a cada persona que está en su tercer período de vida una pensión fija: la cantidad τ' de bien.

Sujeto al cumplimiento de las restricciones de factibilidad, el gobierno elige cada período el precio del capital para maximizar el ingreso total que el gobierno obtiene en el período.

Cada período el gobierno decide qué parte de los ingresos acumula en forma de capital k'_G para el período siguiente. En el período siguiente el gobierno facilita este capital para producir el bien a cambio de recibir el precio del capital.

Cada período el presupuesto del gobierno está equilibrado: ingresos del impuesto sobre salario más ingresos por la venta del capital acumulado en el período anterior igualan el capital que se acumula ahora para el período siguiente más el gasto en la pensión pagada ahora.

Asumiendo que no existe mercado de préstamos del bien, determina la expresión que establece la trayectoria de acumulación del capital total (o, alternativamente, las trayectorias de los componentes del capital total) e identifica a los estados estacionarios de la trayectoria.

62. Gobierno y capital II

Igual que §61 con la diferencia que existe mercado de préstamos.

63. Gobierno y capital III

Igual que §61 con la diferencia que el impuesto sobre el salario es de cuantía fija: cada trabajador paga la cantidad τ del bien y no el porcentaje τ del salario.

64. Gobierno y capital IV

Igual que §61 con única diferencia de que las personas viven dos períodos.

65. Gerontocracia

Sólo existe un bien, que no puede acumularse. Cada período nacen n personas idénticas. Cada joven tiene una dotación de una unidad de trabajo. Los mayores no tienen dotación de trabajo. Cada joven decide qué fracción e de su unidad de trabajo dedica a actividades de recreo (o esparcimiento) y qué fracción $1 - e$ dedica a producir el bien. La función de producción del bien a partir del trabajo es la función de identidad: x unidades de trabajo producen x unidades de bien.

La función de utilidad de todo joven es $u = c\ (c')^2\ e$. En cada período, los mayores imponen a los jóvenes la obligación de darles la proporción τ de la producción que los jóvenes hacen. Los mayores consumen la producción que los jóvenes les entregan y los jóvenes consumen la producción que les resta una vez hecha la transferencia a los mayores. Calcula el consumo de cada joven, el consumo de cada mayor, la parte del trabajo dedicada a actividades de recreo y la proporción de la producción de los jóvenes de la que los mayores se apropian.

66. Ocio

Hay un único bien, que no puede acumularse pero que debe recolectarse empleando el factor trabajo. Hay dos grupos, G1 y G2. Cada miembro de G1 dispone de una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor. Cada miembro de G2 dispone de dos unidades de trabajo de mayor y ninguna de joven. Cada persona decide qué parte de su dotación de factor trabajo dedica a recolectar el bien y qué parte e dedica a ocio (o esparcimiento).

Todos los jóvenes de G1 tienen la función de utilidad $u = c\,c'e$. Todos los jóvenes de G2 tienen la función de utilidad $u = c\,c'$. Todos los mayores de G2 tienen la función de utilidad $u' = c'e'$. La productividad recolectora de cada miembro de G1 son λ unidades de bien por cada unidad de trabajo empleada en recolectar. La productividad de cada miembro de G2 es una unidad de bien por unidad de trabajo empleada en la recolección.

Calcula el equilibrio general y qué porcentaje de su dotación de trabajo dedica cada persona al ocio.

67. Iguales frente a la utilidad

Hay dos grupos, G1(n) y G2(n). La función de utilidad de todo joven es $u = c\,c'$. La dotación de cada miembro de G1 es $(1, 0)$. La dotación de cada miembro de G2 es $(0, 1)$. Existe un gobierno que emite bonos para financiar los gastos. Cada bono paga una unidad de bien el período siguiente a cambio de pagar por el bono p unidades del bien en el período corriente.

(i) Calcula las transferencias que debe hacer un gobierno cada período para que, cada período, todos los jóvenes tengan la misma utilidad y todos los mayores tengan la misma utilidad.

(ii) Determina a los estados estacionarios de la trayectoria de acumulación de deuda pública.

68. Acumulación o hijos con producción

Hay un único bien, que puede producirse y acumularse. Cada período hay dos grupos de personas, G1 y G2 . Cada período nacen n personas de G1 , que viven dos períodos consecutivos. Los miembros de G1 pueden acumular el bien, pero no pueden tener hijos.

Los miembros de G2 no pueden acumular el bien, pero sí tener hijos. Se entiende que los miembros de G2 también viven dos períodos (ya que en el período adicional de niñez se consideran inactivos).

Se dispone de una unidad de trabajo en su primer período de vida y de ninguna en el segundo.

La función de utilidad de todo joven de G1 es $u = \ln c + \alpha \ \ln c'$, donde α es una constante positiva y ln es el logaritmo neperiano. La función de utilidad de todo joven de G2 es $u = \alpha \ \ln c + \ln c'$.

El bien se puede producir cada período $t \geq 2$ con la función de producción agregada $Y = 3\,K^{1/3}L^{2/3}$. En el período inicial, $Y = L$.

El salario ω_2 en unidades del bien que reciben los miembros de G2 es el doble del salario ω_1 en unidades del bien que reciben los miembros de G1 .

Para todo período $t \geq 2$, la remuneración σ del capital en t y los salarios ω_1 y ω_2 del trabajo en t satisfacen $\sigma K = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2$, donde L_1 son las unidades de trabajo que aportan los miembros de G1 y L_2 las unidades de trabajo que aportan los miembros de G2. Esta condición establece que el total de pagos al factor capital es igual al total de pagos al factor trabajo.

Cada período la producción se distribuye entre los dos factores de producción: en $t = 1$, $Y = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2$ y, en $t \geq 2$, $Y = \sigma K + \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2$.

Para los miembros de G2, cada hijo conlleva un coste de γ unidades del bien. Además, cada hijo paga a su progenitor (cuando el hijo es joven y el progenitor mayor) una pensión de p unidades del bien.

Determina la trayectoria de acumulación del capital total y la dinámica de la población total. En cada caso, identifica los estados estacionarios.

69. Hijos y pensiones

Hay un único bien, que puede producirse pero no acumlarse. Las personas viven dos períodos. Todas las personas que nacen en el mismo período tienen las mismas características.

En el primer período de vida: (a) se tiene una unidad de trabajo; (b) se decide qué parte del trabajo se destina a ocio y qué parte a producir el bien; (c) se decide cuántos hijos tener (los hijos nacerán en el siguiente período); (iv) se tiene la función de utilidad $u = c\,(c')^{1/2}\, n\,(x)^{1/3}$, donde n es el nímeroh de hijos y x la cantidad de trabajo dedicada a ocio.

Con l unidades de trabajo se producen βl unidades del bien, donde $\beta > 0$. El coste de tener cada hijo es de $\gamma > 0$ unidades del bien.

En el segundo período de vida cada persona recibe de cada uno de sus hijos (como pensión) p unidades del bien.

(i) Calcula cuánto ocio se escoge.

(ii) Obtén la trayectoria de acumulación de la población y sus estados estacionarios.

(iii) ¿Tiene características maltusianas este modelo?

70. Producción con gobierno

Hay un único bien, que se puede producir y acumular un período. Hay un gobierno, que puede contribuir a producir el bien y puede acumularlo. El gobierno prohíbe el préstamo privado del bien.

Cada período nacen n personas, que viven tres períodos consecutivos.

Se dispone de una unidad de trabajo en el primer período de vida y de ninguna en los otros períodos.

La función de utilidad en el primer período es $u = c\,c'$, donde c es el consumo en el primer período y c' el consumo en el segundo. La función de utilidad en el segundo período es $u' = c'\,c''$, donde c'' es el consumo en el tercer período. La función de utilidad en el tercer período es $u'' = c''$.

El bien se puede producir cada período $t \geq 2$ mediante la función de producción agregada $Y = KLG$, donde Y es la cantidad de bien producida en t, K el capital disponible en t (bien acumulado en $t-1$ por las personas), L el total de unidades de trabajo en t y G es la aportación de bien que hace el gobierno (bien acumulado por el gobierno en $t-1$). En el período inicial $t=1$ la función de producción es $Y=L$.

Toda persona debe pagar en su primer período de vida (y sabe que debe pagar) un impuesto de $\tau > 0$ unidades del bien.

Toda persona recibe del gobierno en el tercer período de vida (y sabe en los períodos anteriores que recibe) un pago de $\tau' = \tau$ unidades del bien.

Las personas en el segundo período de vida no acumulan capital.

La producción del período se reparte a partes iguales entre factor trabajo, factor capital y gobierno.

Cada período, el gobierno iguala ingresos y gastos. En caso de que tenga opción de hacerlo, el gobierno asume el objetivo de maximizar la producción.

(i) Determina la expresión de la trayectoria del capital acumulado por las personas y sus estados estacionarios.

(ii) Determina la trayectoria del capital acumulado por el gobierno y sus estados estacionarios.

(iii) [Este apartado vale por dos] Determina la trayectoria del capital acumulado por el gobierno, y sus estados estacionarios, si la retribución de trabajo y de capital coincide con su productividad marginal y el gobierno asume un posible déficit y se apropia de un posible excedente.