Gobierno y producción con rendimientos decrecientes

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que puede producirse y acumularse. Cada período nacen n personas, que viven dos períodos consecutivos.

• Toda persona joven tiene la función de utilidad $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$, c es el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Hay dos factores de producción: 'trabajo' (los servicios de producción que proporcionan las personas) y 'capital' (bien acumulado que representa medios de producción físicos). El trabajo no es acumulable: sólo se puede utilizar en el período en que se dispone.

• No existe mercado de préstamos del bien.

• Todo joven tiene una unidad de trabajo como dotación. Los mayores no tienen dotación de trabajo.

• Hay una función de producción agregada que indica la cantidad total Y del bien que se produce durante un período t a partir de la cantidad total de trabajo L disponible en t y la cantidad total de capital K disponible en t. La función de producción en cada período es

$$Y = A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma}$$

donde α, γ y A son constantes positivas tales que $\alpha + \gamma < 1$. La desigualdad significa que la función de producción presenta rendimientos decrecientes de escala: si los dos factores de producción aumentan en una proporción, la producción aumenta en menor proporción.

• La remuneración de cada factor de producción es su productividad marginal.

• Un gobierno recibe la producción no repartida entre los factores de producción. Cada período el gobierno distribuye igualitariamente entre los mayores del período la producción recibida.

2. Análisis

• **Decisiones de acumulación de capital de los jóvenes.** Todo joven se enfrenta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = c(c')^{\beta} \;\; \text{con respecto a } c,\, c' \text{ y } k' \\ \text{sujeto a} & c + k' = 1 \cdot \omega \\ & c' = \sigma' k' + \tau \end{array}$$

donde c es el consumo de joven, c' el consumo de mayor, k' el bien acumulado de joven en forma de capital para emplearse de mayor, ω el salario (el precio del factor trabajo) de joven, σ' es el precio del factor capital de mayor y τ es la transferencia que de mayor se recibe del gobierno. Introduciendo las restricciones presupuestarias en la función utilidad, todo joven quiere

$$\text{maximizar} \;\; u = (\omega - k')(\sigma' k' + \tau)^{\beta} \;\; \text{respecto de } k'.$$

Según la condición de primer orden,

$$0 = \frac{du}{dk'} = -(\sigma' k' + \tau)^{\beta} + (\omega - k')\, \beta \sigma' \, (\sigma' k' + \tau)^{\beta - 1}$$

o

$$(\sigma' k' + \tau)^{\beta} = (\omega - k')\, \beta \sigma' \, \frac{(\sigma' k' + \tau)^{\beta}}{\sigma' k' + \tau}$$

o

$$\sigma' k' + \tau = (\omega - k')\beta\sigma'$$

o

$$\boxed{k' = \frac{\omega \sigma' \beta - \tau}{\sigma'(1+\beta)}\,.} \tag{1}$$

Dado que en el modelo la acumulación de capital no puede ser negativa, se podría interpretar que, si la transferencia es suficientemente grande ($\tau > \omega\sigma'\beta$), entonces $k' = 0$.

De la condición $\sigma' k' + \tau = (\omega - k')\beta\sigma'$ se concluye que es necesario $\omega - k' > 0$ para asegurar $k' > 0$. En concreto, tener

$$\omega > k'$$

implica que

$$\omega > \frac{\omega \sigma' \beta - \tau}{\sigma'(1+\beta)}$$

se satisface si

$$\omega\sigma'(1+\beta) > \omega\sigma'\beta - \tau$$

que equivale a

$$\omega\sigma' + \tau > 0$$

desigualdad que es cierta.

En resumen, la fórmula (1) es válida si $\omega > k'$, que es una condición implícita en el modelo dado que un joven no puede acumular más que el salario que obtiene.

• **Precio del factor trabajo.** La productividad marginal del trabajo se define como la derivada de la función de producción agregada respecto al trabajo:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma})}{dL} = A\, K^{\alpha}\, \frac{d(L^{\gamma})}{dL} = \gamma\, A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma - 1}. \tag{2}$$

Este resultado es válido cada período.

• **Precio del factor capital.** La productividad marginal del capital se define como la derivada de la función de producción de la economía respecto al capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma})}{dK} = A\, L^{\gamma}\, \frac{d(K^{\alpha})}{dK} = \alpha\, A\, L^{\gamma}\, K^{\alpha - 1}. \tag{3}$$

Este resultado es válido cada período.

• **Producción asignada al gobierno.** Cada período, la parte de la producción Y que recibe el factor trabajo es

$$\omega L = (\gamma A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma-1})L = \gamma\, A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma} = \gamma Y.$$

Cada período, la parte de la producción Y que recibe el factor capital es

$$\sigma K = (\alpha A\, L^{\gamma}\, K^{\alpha-1})K = \alpha\, A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma} = \alpha Y.$$

Por consiguiente, la producción que se asigna a los dos factores es (recordando que $\gamma + \alpha < 1$)

$$\omega L + \sigma K = \gamma Y + \alpha Y = (\gamma + \alpha)Y < Y.$$

De ello se deduce que el gobierno recibe

$$Y - (\omega L + \sigma K) = Y - (\alpha + \gamma)Y = (1 - \alpha - \gamma)Y.$$

• **Cantidad total de factores cada período.** Cada período hay n jóvenes y n mayores. Así que la cantidad total de factor trabajo cada período es

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n.$$

Se deduce que $L' = L$: cada período existe la misma cantidad total de factor trabajo.

En relación con el capital, los mayores son los únicos que lo aportan cada período. Como resultado, la cantidad total K de factor capital existente en un período dado es nk.

• **Cálculos de precios de los factores de producción.** Según la fórmula (2) de retribución del salario,

$$\omega = \gamma\, A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma-1} = \gamma A\, (nk)^{\alpha}\, (n)^{\gamma-1} = \gamma A\, n^{\alpha+\gamma-1}\, k^{\alpha}$$

donde $\alpha + \gamma - 1 < 0$. Por otra parte, según (3),

$$\sigma' = \alpha A\, L'^{\gamma}\, K'^{\alpha-1} = \alpha A\, n^{\gamma}\, (nk')^{\alpha-1} = \alpha A\, n^{\alpha+\gamma-1}\, k'^{\alpha-1}.$$

• **Transferencia a cada mayor.** Dado que el gobierno recibe cada período $(1 - \alpha - \gamma)Y$, se concluye que la transferencia τ asignada cada período a cada una de las n personas mayores es

$$\tau = \frac{(1 - \alpha - \gamma)Y}{n}.$$

Debido a que cada período hay $2n$ personas, la producción per cápita es $Y/2n$. En consecuencia, la transferencia sería $2(1 - \alpha - \gamma)$ veces la producción per cápita. Por ejemplo, con $\alpha = \gamma = 1/8$, la transferencia sería 1,5 veces la producción per cápita; y con $\alpha = 1/2$ y $\gamma = 1/4$, la transferencia sería 0,5 veces la producción per cápita.

Por la función de producción agregada, la producción cada período es

$$Y = A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma} = A\, (nk)^{\alpha}\, n^{\gamma} = A\, n^{\alpha+\gamma}\, k^{\alpha}.$$

Así pues,

$$\boxed{\tau = \frac{(1-\alpha-\gamma)Y}{n} = (1-\alpha-\gamma)\,A\,n^{\alpha+\gamma-1}\,k^{\alpha}.} \tag{4}$$

• **Capital que acumula cada joven.** Empleando las fórmulas (1) y (4),

$$k' = \frac{\omega\sigma'\beta-\tau}{\sigma'(1+\beta)} = \frac{\omega\beta}{1+\beta} - \frac{\tau}{\sigma'(1+\beta)} = \frac{\beta\gamma A\,n^{\alpha+\gamma-1}}{1+\beta}k^{\alpha} - \frac{(1-\alpha-\gamma)\,A\,n^{\alpha+\gamma-1}\,k^{\alpha}}{\alpha A\,n^{\alpha+\gamma-1}\,k'^{\alpha-1}\,(1+\beta)} =$$

$$= \frac{\beta\gamma A\,n^{\alpha+\gamma-1}}{1+\beta}k^{\alpha} - \frac{1-\alpha-\gamma}{\alpha(1+\beta)}\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha}.$$

Definiendo las constantes

$$C = \frac{\beta\gamma A\,n^{\alpha+\gamma-1}}{1+\beta}$$

y

$$D = \frac{1-\alpha-\gamma}{\alpha(1+\beta)}$$

el resultado se resume en la expresión

$$k' = C\,k^{\alpha} - D\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha}$$

o

$$k' + D\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha} = C\,k^{\alpha}$$

o

$$k' + D\left(\frac{k}{k'}\right)^{\alpha}\,k' = C\,k^{\alpha}$$

o

$$\boxed{k'\left(1 + D\left(\frac{k}{k'}\right)^{\alpha}\right) = C\,k^{\alpha}.} \tag{5}$$

La ecuación (5) define implícitamente la trayectoria de acumulación del capital de cada joven (o de cada trabajador). Derivando (5) implícitamente (tratando k'como función de k) se puede establecer si (5) define una relación creciente o decreciente (o de otro tipo) entre el capital k que un joven acumula en un período y el capital k' que el joven acumula en el período siguiente. En particular, considerando la versión

$$k' + D\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha} = C\,k^{\alpha}$$

de (5) la derivada implícita comporta

$$\frac{d(k' + D\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha})}{dk} = \frac{d(C\,k^{\alpha})}{dk}.$$

Por un lado,

$$\frac{d\left(k' + D\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha}\right)}{dk} = \frac{d(k')}{dk} + \frac{d\left(D\,k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha}\right)}{dk} = \frac{dk'}{dk} + D\,\frac{d\left(k^{\alpha}\,k'^{1-\alpha}\right)}{dk} =$$

$$= \frac{dk'}{dk} + D\left(\frac{d(k^{\alpha})}{dk}k'^{1-\alpha} + k^{\alpha}\frac{d\left(k'^{1-\alpha}\right)}{dk}\right) = \frac{dk'}{dk} + D\left(\alpha\,k^{\alpha-1}\,k'^{1-\alpha} + k^{\alpha}\,(1-\alpha)\,k'^{-\alpha}\,\frac{dk'}{dk}\right).$$

Por otro,

$$\frac{d(C\,k^{\alpha})}{dk} = C\frac{d(k^{\alpha})}{dk} = C\,\alpha\,k^{\alpha-1}.$$

Por tanto,

$$\frac{dk'}{dk} + D\left(\alpha\,k^{\alpha-1}\,k'^{1-\alpha} + k^{\alpha}\,(1-\alpha)\,k'^{-\alpha}\,\frac{dk'}{dk}\right) = C\,\alpha\,k^{\alpha-1}$$

o

$$\frac{dk'}{dk}\left(1 + D(1-\alpha)\left(\frac{k'}{k'}\right)^{\alpha}\right) = \alpha\,k^{\alpha-1}\left(C + D\,k'^{1-\alpha}\right)$$

o

$$\frac{dk'}{dk} = \frac{\alpha\,k^{\alpha-1}\left(C + D\,k'^{1-\alpha}\right)}{\left(1 + D(1-\alpha)\left(\frac{k'}{k'}\right)^{\alpha}\right)}$$

que es siempre un valor positivo (ya que $C > 0$, $D > 0$ y $\alpha < 1$). En suma, la función entre k y k'expresada en (5) es una función creciente: aumentar k conlleva aumentar k'. Para determinar la concavidad o convexidad de la función habría que volver a derivar implícitamente (se deja como ejercicio).

• **Estados estacionarios.** A pesar del interés en conocer la trayectoria del capital por joven, es suficiente determinar los estados estacionarios de la trayectoria (cualquier predicción del capital que acumula un joven que no fuera un valor de estado estacionario no sería una predicción acertada, dado que un período después la predicción se convertiría en errónea).

Los estados estacionarios de la trayectoria definida por (5) se obtienen añadiendo la condición de estacionariedad $k = k'$ (geométricamente, en el espacio (k, k'), los estados estacionarios se corresponden con las intersecciones entre la función definida por (5) y la diagonal principal).

Definiendo $\bar{k} = k = k'$ en (5)

$$\bar{k}\left(1 + D\left(\frac{\bar{k}}{\bar{k}}\right)^{\alpha}\right) = C\,\bar{k}^{\alpha}$$

o

$$\bar{k}(1+D) = C\,\bar{k}^{\alpha}$$

o

$$\bar{k}^{1-\alpha} = \frac{C}{1+D}$$

o

$$\boxed{\bar{k} = \left(\frac{C}{1+D}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

o

$$\bar{k} = \left(\frac{1}{1+\frac{D}{C}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

donde

$$\frac{D}{C} = \left(\frac{1-\alpha-\gamma}{A\alpha\beta\gamma}\right)n^{1-\alpha-\gamma}$$

Se deja como ejercicio calcular el efecto sobre $\bar{k}$:

- de una variación en la preferencia temporal β de los jóvenes;
- de una variación en el nivel tecnológico (o productividad total de los factores) A;
- de una variación en la elasticidad α de la producción respecto del capital (comprueba que $\alpha = \frac{dY/Y}{dK/K} = \frac{dY}{dK}\frac{K}{Y} = PMg_K\,\frac{K}{Y}$);
- de una variación en la elasticidad γ de la producción respecto al trabajo (comprueba que $\gamma = \frac{dY/Y}{dL/L} = \frac{dY}{dL}\frac{L}{Y} = PMg_L\,\frac{L}{Y}$).

3. Sin gobierno y sólo el mercado de trabajo competitivo

Cuando los rendimientos de escala no son constantes, la producción no coincide con su reparto competitivo entre los factores de producción. Formalmente, con $\omega = PMg_L$ y $\sigma = PMg_K$,

$$Y \neq \omega L + \sigma K.$$

Si los rendimientos son decrecientes, $Y > \omega L + \sigma K$; si crecientes, $Y < \omega L + \sigma K$.

En el ejemplo de los apartados anteriores (donde los rendimientos de escala eran decrecientes) se ha asumido que la diferencia $Y - (\omega L + \sigma K)$ se la llevaba el gobierno. Este apartado sugiere una alternativa: el factor capital se lleva la diferencia (el siguiente apartado considera el caso simétrico: se lo lleva el factor trabajo).

En este caso, (1) sigue siendo una fórmula válida, sólo que ahora $\tau = 0$:

$$k' = \frac{\beta}{1+\beta}\omega$$

Esto hace que, para cada joven, el precio del capital en el futuro sea irrelevante: lo único que importa al decidir la acumulación de bien (su preferencia temporal β aparte) es el salario corriente ω. En concreto, por (2):

$$\omega = PMg_L = \gamma A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma-1} = \gamma A\,(n\,k)^{\alpha}\,n^{\gamma-1} = \gamma A\,n^{\alpha+\gamma-1}\,k^{\alpha}.$$

Así,

$$\boxed{k' = \frac{A\,\beta\,\gamma}{(1+\beta)n^{1-\alpha-\gamma}}k^{\alpha}.} \tag{6}$$

La función es similar a la que resultaría si los rendimientos fueran constantes ($\alpha + \gamma = 1$) y los mercados competitivos: la única diferencia es la constante que acompaña k^{α}.

4. Sin gobierno y sólo el mercado de capital competitivo

Aún vale la expresión

$$k' = \frac{\beta}{1+\beta}\omega$$

pero ahora el factor trabajo se lleva todo lo que el mercado competitivo no asigna al capital:

$$\omega L = Y - PMg_K\, K.$$

En consecuencia, empleando (3),

$$\omega L = A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma} - (\alpha A\, L^{\gamma}\, K^{\alpha-1})K$$

$$\omega = A\, K^{\alpha}\, L^{\gamma-1} - \alpha A\, L^{\gamma-1}\, K^{\alpha}$$

$$\omega = A\,(nk)^{\alpha}\, n^{\gamma-1} - \alpha A\, n^{\gamma-1}\,(nk)^{\alpha}$$

$$\omega = A\, n^{\alpha+\gamma-1}\, k^{\alpha} - A\alpha\, n^{\alpha+\gamma-1}\, k^{\alpha}$$

$$\omega = A(1+\alpha)\, n^{\alpha+\gamma-1}\, k^{\alpha}$$

$$\omega = \frac{A(1+\alpha)}{n^{1-\alpha-\gamma}}k^{\alpha}.$$

Empleando $k' = \frac{\beta}{1+\beta}\omega$ se sigue que

$$\boxed{k' = \frac{A\,\beta\,(1+\alpha)}{(1+\beta)n^{1-\alpha-\gamma}}k^{\alpha}.} \tag{7}$$

La diferencia respecto al caso anterior es que ahora $1+\alpha$ (el parámetro del factor competitivo ahora: el capital) reemplaza γ (el parámetro del factor competitivo entonces: el trabajo).

Si $1+\alpha > \gamma$, entonces la gráfica que representa (7) queda por encima de la que representa (6), dado que el mismo valor de k genera un valor de k' mayor según (7) que según (6). Por este motivo, el valor (positivo) de estado estacionario de k será superior según (7).

¿Sería esperable que si la elasticidad de la producción del capital es suficientemente grande (cambios proporcionales en el capital causan incrementos proporcionales suficientemente grandes en la producción) entonces es preferible para la acumulación de capital que el mercado que deba ser competitivo sea el mercado de capital?

Los resultados anteriores sugieren que lo más favorable para la acumulación de capital es hacer competitivo el mercado del factor que tiene una incidencia superior (en términos de elasticidades) en la producción y permitir que el otro factor 'explote' el factor respecto del cual la producción es más sensible (apropiándose de la producción sobre todo una vez satisfechas las remuneraciones competitivas).