Gasto público en la función de producción

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que puede producirse y acumularse.

• Cada período nacen n personas idénticas.

• Cada persona vive dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de toda persona es una unidad de trabajo de joven y ninguna de mayor.

• Hay un gobierno que cada período recauda impuestos: cada joven paga al gobierno τ unidades de bien.

• Cada período la función de producción $Y = G\, K^{1/2}\, L^{1/2}$ determina la producción Y del bien, donde K es la cantidad de bien acumulada el período anterior, L es la cantidad total de trabajo disponible en el período corriente y G es el gasto público corriente que hace el gobierno.

• Cada período el presupuesto del gobierno está equilibrado: $n\, \tau = G$ (el gobierno no acumula ni se endeuda).

• El mercado de trabajo y el mercado de capital son competitivos: el salario ω es la productividad marginal $\frac{\partial Y}{\partial L}$ del trabajo y el precio σ del capital es la productividad marginal $\frac{\partial Y}{\partial K}$ del capital.

2. Análisis

• **Decisión de acumular bien de los jóvenes.** Todo joven se propone

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad u = c\, c' \quad \text{con respecto a } c,\, c' \text{ y } k' \\ &\text{sujeto a} \quad c + k' + \tau = \omega \\ &\qquad\qquad\quad c' = \sigma'\, k' \end{aligned}$$

donde

- c es el consumo de joven,
- c' es el consumo de mayor,
- k' es el volumen de capital acumulado (y empleado en el período siguiente),
- τ son los impuestos a pagar,
- ω es el salario corriente y
- σ' es la remuneración (correctamente anticipada) del capital en el período siguiente.

Insertando las dos restricciones en la función objetivo se trata de

$$\text{maximizar} \quad u = (\omega - k' - \tau)\, \sigma'\, k' \quad \text{respecto de } k'.$$

El resultado:

$$k' = \frac{\omega - \tau}{2} \tag{1}$$

que establece que cada joven acumula en forma de capital la mitad de la cantidad de bien disponible una vez paga el impuesto.

- **Dinámica de la acumulación de capital.** Dada la hipótesis que el mercado de trabajo es competitivo

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{2}\, G\, K^{1/2}\, L^{-1/2} = \frac{G}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$$

donde $K = n\,k$ es el capital total del período, $L = n\,1$ es el trabajo total del período y G es el gasto público del período. Por la hipótesis de equilibrio presupuestario, $G = n\,\tau$. Por consiguiente,

$$\omega = \frac{n\tau}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = \frac{n\tau}{2}\left(\frac{nk}{n}\right)^{1/2} = \frac{n\tau}{2}k^{1/2}.$$

Insertando la ecuación anterior en (1) ,

$$\boxed{k' = \frac{n\tau}{4}k^{1/2} - \frac{\tau}{2}} \tag{2}$$

que es la ecuación que traza la dinámica de acumulación del capital (per cápita).

La Fig. 1 representa (2) para n suficientemente grande en relación con τ. De (2) es interesante que, dado el impuesto τ, es necesario un volumen de población n de jóvenes suficientemente grande como para que haya algún estado estacionario. Además, para ser viable, la economía requiere un capital per cápita mínimo igual a k_0.

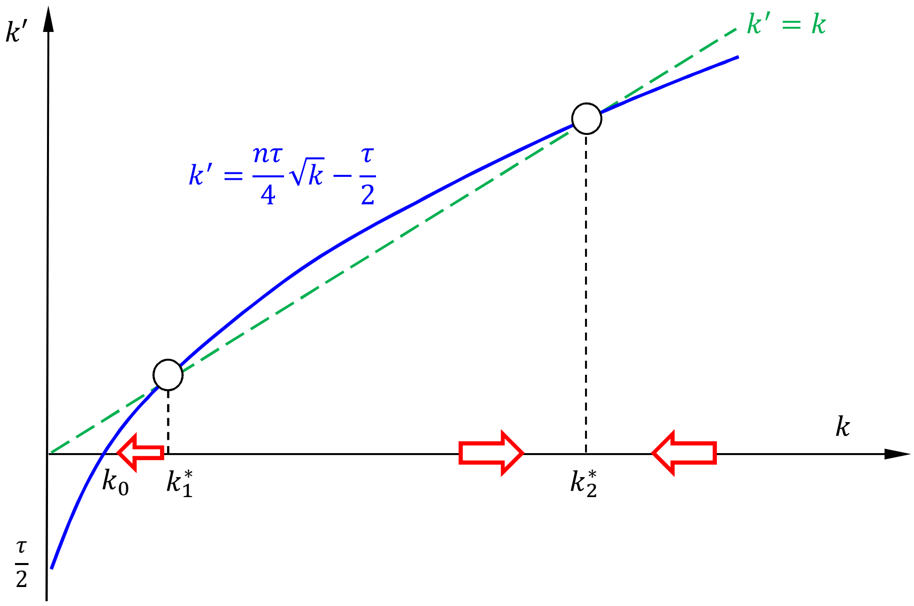

Fig. 1. Dinámica del capital per cápita

Si n es suficientemente grande, existen dos valores del capital per cápita de estado estacionario, k_1^* y k_2^*. De estos, sólo el segundo (el mayor valor) es estable.

Las flechas rojas en la Fig. 1 indican la evolución del capital per cápita: si el capital per cápita toma valor entre k_1^* y k_2^*, el capital aumenta en dirección a k_2^*; si el valor es superior a k_2^*, entonces disminuye en dirección a k_2^*; y si el valor es inferior a k_1^*, entonces disminuye (hacia k_0). Esta dinámica indica que k_2^* es el valor del capital per cápita de un estado estacionario estable y k_1^* el valor de uno inestable.

También es destacable el papel positivo que juega el gasto público. Por la condición de equilibrio presupuestario $n\,\tau = G$, (2) equivale a

$$k' = \frac{G}{4}k^{1/2} - \frac{G}{2n} = G\left(\frac{k^{1/2}}{4} - \frac{1}{2n}\right)$$

que implica que el capital per cápita (y, por ende, la producción per cápita) depende positivamente del gasto público (si se cumple la aparentemente débil condición que $kn^2 > 4$ o $n > 2/k^{1/2}$).

Por ejemplo, sin gobierno (ni impuesto ni gasto público) la trayectoria de acumulación de capital estaría definida por

$$k' = \frac{1}{4}k^{1/2}$$

con un valor (positivo) del capital per cápita de estado estacionario

$$k^* = \frac{1}{16}.$$

En cambio, con un gasto público de (por ejemplo), $G^2 = 32$ el valor (estable) del capital per cápita de estado estacionario sería superior:

$$k^* = \frac{1}{2}.$$

Este ejemplo evidencia que, en el modelo definido, el sector público tiene una influencia positiva en la producción total (y en la producción per cápita). Una posible interpretación de esta influencia es que G representa infraestructuras públicas, que inciden positivamente en la productivitat total de los factores de producción del sector privado..

• **Ejercicio.** Calcula las expresiones que definen los valores de estado estacionario k_1^* y k_2^* de la Fig. 1.