Hijos y préstamos

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Inicialmente hay dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros. A efectos prácticos, se vive dos períodos.

• Todo joven decide cuántos hijos tener. Los hijos son niños cuando el padre es joven y se convierten en jóvenes en el período siguiente, cuando el padre es mayor.

• Cada joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c' \cdot n^{\delta}$, donde c es el consumo del bien de joven, c' el consumo de mayor, n el número de hijos que el joven decide tener y δ un parámetro positivo. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Los niños son económicamente inactivos y no tienen función de utilidad.

• El coste de tener hijos son $\gamma > 0$ unidades de bien por hijo.

• La dotación de cada miembro de G1 es $(1, 0)$: una unidad de bien de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es $(2, 2)$: dos unidades de joven y dos de mayor.

2. Análisis de decisiones

• **Préstamos y acumulación.** El bien tiene tres usos posibles: consumirlo, prestarlo o emplearlo en tener hijos.

• **Decisiones de los miembros de G1.** Todo joven del grupo G1 tiene el problema de

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' \cdot {n_1}^{\delta} \ \text{ respecto de } c_1,\, c_1' \text{ y } n_1 & \\
\text{sujeto a} & c_1 + l_1 + \gamma n_1 = 1 & \text{(restricción de joven)} \\
 & c_1' = R l_1 & \text{(restricción de mayor)}
\end{array}
$$

donde

- c_1 es el consumo presente (de joven),
- c_1' es el consumo futuro (de mayor),
- n_1 es el número de hijos que se decide tener de joven,
- l_1 es el volumen de préstamos y
- R es el tipo de interés bruto.

Las restricciones pueden integrarse en una sola:

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} + \frac{\gamma n_1}{R} = 1.$$

El lagrangiano correspondiente se maximiza respecto de c_1, c_1' y n_1. Las soluciones son:

$$c_1 = l_1 = \frac{1}{2+\delta}$$

$$c_1' = Rc_1 = \frac{R}{2+\delta}$$

$$\boxed{n_1 = \frac{\delta}{\gamma(2+\delta)}.}$$

Esto significa que si en el período t hay m jóvenes en G1, entonces habrá mn_1 en $t+1$.

• **Decisiones de los miembros de G2.** Todo joven del grupo G2 tiene el problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_1 = c_2 \cdot c_2' \cdot {n_2}^{\delta} \ \text{ respecto de } c_2, c_2' \text{ y } n_2 & \\ \text{sujeto a} & c_2 + l_2 + \gamma n_2 = 2 & \text{(restricción de joven)} \\ & c_2' = 2 + Rl_2 & \text{(restricción de mayor)} \end{array}$$

donde

- c_2 es el consumo presente (de joven),
- c_2' es el consumo futuro (de mayor),
- n_2 es el número de hijos que se decide tener de joven,
- l_2 es el volumen de préstamos y
- R es el tipo de interés bruto.

Las restricciones pueden integrarse en una sola:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} + \frac{\gamma n_2}{R} = 2 + \frac{2}{R}.$$

El lagrangiano correspondiente se maximiza respecto de c_2, c_2' y n_2. Las soluciones son:

$$c_2 = \frac{2+2/R}{2+\delta}$$

$$c_2' = R \cdot c_2 = \frac{2+2R}{2+\delta}$$

$$l_2 = \frac{c_2' - 2}{R} = c_2 - \frac{2}{R} = \frac{2+\frac{2}{R}}{2+\delta} - \frac{2}{R}$$

$$\boxed{n_2 = \frac{5+2\delta}{\gamma(1+\delta+3/\delta)} = \frac{\delta(5+2\delta)}{\gamma(3+\delta+\delta^2)}.}$$

Un aspecto destacable de las fórmulas para n_1 y n_2 es quen o dependen del tipo de interés R: ambos valores dependen negativamente del coste γ de tener hijos y positivamente de la preferencia relativa δ de tener hijos frente a consumir el bien.

$$\frac{\partial n_1}{\partial \delta} = \frac{\gamma(2+\delta) - \delta\gamma}{\gamma^2(2+\delta)^2} = \frac{2\gamma}{\gamma^2(2+\delta)^2)} > 0$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \delta} = \frac{\gamma(3+\delta+\delta^2)(5+4\delta) - \delta\gamma(1+2\delta)}{\gamma^2(3+\delta+\delta^2)^2} = \frac{15+12\delta+3\delta^2+4\delta^3}{\gamma(3+\delta+\delta^2)^2} > 0$$

3. Análisis agregado

• **Dinámica demográfica.** ¿Qué grupo tiene más hijos? En particular, $n_2 > n_1$ ocurre si

$$\frac{\delta(5+2\delta)}{\gamma(3+\delta+\delta^2)} > \frac{\delta}{\gamma(2+\delta)}.$$

Esto es,

$$n_2 > n_1 \leftrightarrow (5+2\delta)(2+\delta) > (3+\delta+\delta^2).$$

Pero

$$(5+2\delta)(2+\delta) > (3+\delta+\delta^2)$$

equivale a

$$7+8\delta+\delta^2 > 0,$$

que siempre se satisface. Como consecuencia, $n_2 > n_1$: el grupo 'rico' G2 tiene más hijos.

• **Tipo de interés de equilibrio.** En el período inicial, la condición de equilibrio en el mercado de préstamos es

$$nl_1 + nl_2 = 0$$

o

$$\left(\frac{1}{2+\delta}\right) + \left(\frac{2+\frac{2}{R}}{2+\delta} - \frac{2}{R}\right) = 0$$

de donde se concluye

$$\boxed{R = \frac{2}{3}(1+\delta)\,.}$$

Para períodos $t \geq 2$ las funciones de préstamos l_1 y l_2 son las mismas que en $t = 1$ (no dependen del período considerado), pero el tamaño de cada grupo será diferente (ya que el número de miembros de cada grupo depende del período). Además, en cada período el número de hijos que tienen los miembros de G1 es constante: n_1. Igual para G2: número constante de hijos n_2.

En concreto, en el período inicial $t = 1$ hay n miembros en G1; en $t = 2$, hay $n\,n_1$(cada uno de los $n$miembros originales ha tenido n_1 hijos); en $t = 3$, hay $(n\,n_1)n_1$ (cada uno de los $n\,n_1$miembros ha tenido n_1 hijos); y así sucesivamente. Por inducción, se concluye que en el período $t \geq 1$ el grupo G1 está formado por $n(n_1)^{t-1}$ miembros.

Análogamente se muestra que en $t \geq 1$ el grupo G2 está formado por $n(n_2)^{t-1}$ miembros.

En $t \geq 2$ la condición de equilibrio en el mercado de préstamos es

$$n(n_1)^{t-1}l_1 + n(n_2)^{t-1}l_2 = 0$$

o

$$(n_1)^{t-1}l_1 + (n_2)^{t-1}l_2 = 0$$

o

$$\left(\frac{\delta}{\gamma(2+\delta)}\right)^{t-1}\frac{1}{2+\delta} + \left(\frac{\delta(5+2\delta)}{\gamma(3+\delta+\delta^2)}\right)^{t-1}\left(\frac{2+\frac{2}{R_t}}{2+\delta} - \frac{2}{R_t}\right) = 0$$

Se deja como ejercicio despejar R_t y establecer si este valor converge cuando t aumenta. El hecho que $n_2 > n_1$ sugiere que el tipo de interés crecerá, ya que n_2 son hijos de prestatarios y n_1 son hijos de prestamistas. Comprueba en tu análisis si esta conjetura es válida.

• **Ejercicio.** En cada período, en equilibrio,

$$(n_1)^{t-1}l_1 + (n_2)^{t-1}l_2 = 0$$

o

$$(n_1)^{t-2}n_1 l_1 + (n_2)^{t-2}n_2 l_2 = 0.$$

En concreto, para $t \geq 3$,

$$(n_1)^{t-2}l_1 + (n_2)^{t-2}l_2 = 0$$

$$(n_2)^{t-2}l_2 = -(n_1)^{t-2}l_1$$

y, por tanto,

$$(n_1)^{t-2}n_1 l_1 + (n_2)^{t-2}n_2 l_2 = 0$$

equivale a

$$(n_1)^{t-2}n_1 l_1 = n_2(n_1)^{t-2}l_1$$

y, en conclusión,

$$n_1 = n_2.$$

Pero, ¿cómo puede ser cierto este resultado si previamente se ha demostrado que $n_2 > n_1$?