

Un modelo malthusiano con microfundamentos

1. Elementos del modelo ¹

• **Capacidad productiva.** El tiempo se mide en períodos discretos. Hay un único bien, Y . El bien puede ser producido utilizando dos factores de producción: tierra D y trabajo L . La cantidad de tierra es fija y constante cada período. La función de producción agregada en el período t es

$$Y_t = (A \cdot D)^\alpha \cdot L_t^{1-\alpha}$$

donde:

- Y_t es la cantidad de bien producida en el período t ;
- A representa el estado o 'nivel' de la tecnología;
- D es la cantidad fija de tierra;
- α es un número entre 0 y 1; y
- L_t es la cantidad de trabajo empleada en la producción del bien en el período t .

El término $A \cdot D$ cuantifica los recursos que efectivamente se emplean en la producción. Grosso modo, el estado de la tecnología sintetiza todos los factores que inciden sobre la productividad de la tierra: la calidad del suelo, el clima, los métodos de cultivo, el aprendizaje de técnicas para obtener producto de la tierra, etc. La combinación $A \cdot D$ define la tierra efectivamente utilizada en la producción. Por ejemplo, si $A = 2$ una unidad de tierra hace, en la práctica, el mismo efecto que dos (cuando $A = 1$, el valor de A representaría el nivel productivo básico o mínimo de la tierra).

• **Labriegos.** Los labriegos aportan trabajo y llevan a cabo la producción. La producción y_t por labriego en el período t es

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \left(\frac{A \cdot D}{L_t} \right)^\alpha.$$

Todos los labriegos son idénticos y viven dos períodos consecutivos. En el segundo período de vida

- cada labriego decide cuántos hijos tener (las familias son monoparentales);
- todo labriego se convierte en económicamente activo y emplea toda su dotación de trabajo, con independencia de la renta que obtenga;
- la renta de un labriego en el período t es igual a la producción y_t por labriego en el período t ;
- la renta de cada labriego se destina a consumir y criar hijos.

En su primer período de vida un labriego es económicamente inactivo y debe ser sostenido por su progenitor. Se puede considerar que, en el primer período, un labriego es un niño que no toma por sí mismo ninguna decisión. Cada labriego está caracterizado en su segundo período t de vida por la función de utilidad

¹ El modelo se toma del artículo de Quamrul Ashraf y Oded Galor (2011): "Dynamics and stagnation in the Malthusian epoch", *American Economic Review* 101(5), 2003-2041. El modelo se describe y analiza en las páginas 2005-2009.

$$u_t = c_t^\beta \cdot n_t^{1-\beta}$$

donde c_t es la cantidad de bien que consume el labriego en el período t , n_t es el número de hijos que el labriego ha elegido tener y β es un número entre 0 y 1 que representa la preferencia relativa del labriego entre consumir y tener hijos. El coste asociado con la tenencia y crianza de hijos es un coste fijo de $\gamma > 0$ unidades de bien por hijo.

2. Análisis del modelo: relación entre producto per cápita y población

Cada labriego del período t elige c_t y n_t para maximizar u_t dada la restricción presupuestaria

$$c_t + \gamma n_t = y_t.$$

El lagrangiano correspondiente al problema de

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } u_t = c_t^\beta n_t^{1-\beta} \text{ con respecto a } c_t \text{ y } n_t \\ & \text{sujeto a } c_t + \gamma n_t = y_t \end{aligned}$$

es

$$\mathcal{L}_t = c_t^\beta n_t^{1-\beta} + \lambda(y_t - c_t - \gamma n_t).$$

Las condiciones de primer orden (asumiendo que las de segundo de orden se satisfacen) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_t} &= \beta c_t^{\beta-1} n_t^{1-\beta} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial n_t} &= (1 - \beta) n_t^{-\beta} c_t^\beta - \lambda \gamma = 0. \end{aligned}$$

Por la primera ecuación,

$$\lambda = \beta c_t^{\beta-1} n_t^{1-\beta}.$$

Por la segunda,

$$\lambda = \frac{1 - \beta}{\gamma} c_t^\beta n_t^{-\beta}.$$

Como resultado,

$$\beta c_t^{\beta-1} \frac{1}{c_t} n_t^{1-\beta} n_t = \frac{1 - \beta}{\gamma} c_t^\beta n_t^{-\beta}$$

y, en definitiva,

$$n_t = \frac{1 - \beta}{\beta \gamma} c_t.$$

Introduciendo la anterior ecuación en la restricción presupuestaria $c_t + \gamma n_t = y_t$ se obtiene

$$c_t = \beta y_t$$

y

$$n_t = \frac{1 - \beta}{\gamma} y_t.$$

Dado que $1 - \beta > 0$ un incremento de la producción por campesino causa un aumento del número de hijos: $\frac{dn_t}{dy_t} = \frac{1 - \beta}{\gamma} > 0$. El modelo reproduce la característica relación positiva entre producción per cápita y crecimiento de la población que postula la visión malthusiana.

3. Análisis del modelo: dinámica demográfica y estado estacionario

Para todo período t , L_t designa el número de labriegos en t en su segundo período de vida (la fuerza laboral). De acuerdo con esto,

$$L_{t+1} = n_t L_t$$

expresa que el número de labriegos activos en $t + 1$ es igual al número de hijos que los labriegos activos en t tuvieron. Combinando las ecuaciones $L_{t+1} = n_t L_t$, $n_t = \frac{1 - \beta}{\gamma} y_t$ y $y_t = \left(\frac{AD}{L_t}\right)^\alpha$ se obtiene

$$L_{t+1} = \frac{1 - \beta}{\gamma} \left(\frac{AD}{L_t}\right)^\alpha L_t$$

Esto es,

$$L_{t+1} = \frac{1 - \beta}{\gamma} (AD)^\alpha L_t^{1 - \alpha}$$

o, definiendo $a = \frac{1 - \beta}{\gamma} (AD)^\alpha$,

$$L_{t+1} = a L_t^{1 - \alpha}. \tag{1}$$

Se sigue de $a > 0$ y $0 < 1 - \alpha < 1$ que

$$\frac{dL_{t+1}}{dL_t} = a(1 - \alpha) L_t^{-\alpha} = \frac{a(1 - \alpha)}{L_t^\alpha} > 0$$

y

$$\frac{d^2 L_{t+1}}{dL_t^2} = -a(1 - \alpha) \alpha L_t^{-\alpha - 1} < 0.$$

Estas derivadas indican que la función (1) que define la dinámica de la población de labriegos activos es: (i) creciente; (ii) estrictamente cóncava; (iii) arranca del origen (ya que $L_t = 0$ implica $L_{t+1} = 0$); y (iv) tiene una derivada $\frac{dL_{t+1}}{dL_t}$ decreciente, que se aproxima a cero a medida que L_t crece y que sube sin límite a medida que L_t se aproxima a cero.

La Fig. 1 representa gráficamente la ecuación (1). Un rasgo destacable es que, obviando el origen, la curva que representa (1) intersecta la diagonal principal (es decir, los pares (L_{t+1}, L_t) tales que $L_{t+1} = L_t$) sólo en un punto: el punto e . En este punto, que se corresponde con el valor L^* , se alcanza un estado estacionario, puesto que $L_t = L^*$ implica $L_{t+1} = L^* = L_t$.

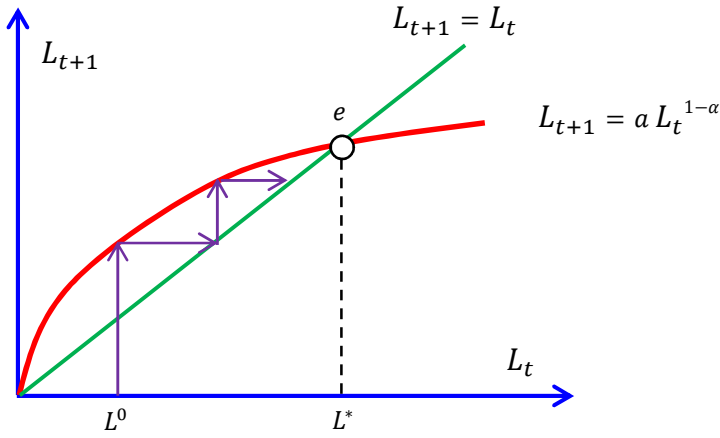


Fig. 1. Población: dinámica y estado estacionario

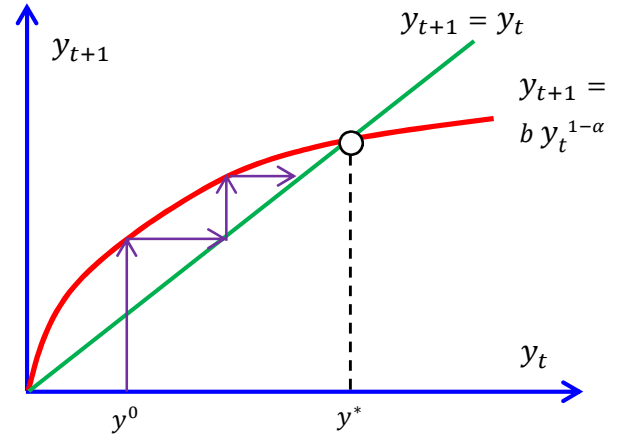


Fig. 2. Producción per cápita

El estado estacionario representado por e en la Fig. 1 se obtiene de (1) y la condición $L_{t+1} = L_t$. El valor L^* que satisface ambas ecuaciones es $L^* = a L^{*1-\alpha}$; en concreto, el valor estacionario de la población es $L^* = a^{1/\alpha}$. En suma,

$$L^* = A D \left(\frac{1-\beta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2)$$

El estado estacionario del proceso dinámico (1) es estable: partiendo de un volumen de población positivo pero diferente de L^* , la dinámica de (1) hace converger el volumen de población a L^* . Esta idea se ilustra en la Fig. 1 asumiendo que el valor inicial es $L^0 < L^*$: la secuencia de valores que genera (1) partiendo de L^0 converge a L^* . El mismo resultado se obtendría partiendo de cualquier $L^0 > L^*$. Definiendo la densidad de población (o, más precisamente, la densidad de labriegos activos) en el período t como $F_t = L_t/D$, la densidad estacionaria es $F^* = L^*/D$ o

$$F^* = A \left(\frac{1-\beta}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Por otra parte, recordando que $y_t = \left(\frac{AD}{L_t} \right)^\alpha$ y que $L_{t+1} = n_t L_t$,

$$y_{t+1} = \left(\frac{AD}{L_{t+1}} \right)^\alpha = \left(\frac{AD}{n_t L_t} \right)^\alpha = \frac{1}{n_t^\alpha} \left(\frac{AD}{L_t} \right)^\alpha = \frac{y_t}{n_t^\alpha}.$$

Sabiendo que $n_t = \frac{1-\beta}{\gamma} y_t$, la dinámica de la producción per cápita queda descrita por la ecuación en diferencias $y_{t+1} = \left(\frac{\gamma}{1-\beta} \right)^\alpha y_t^{1-\alpha}$. Definiendo $b = \left(\frac{\gamma}{1-\beta} \right)^\alpha > 0$, una expresión más compacta sería

$$y_{t+1} = b y_t^{1-\alpha}. \quad (3)$$

La ecuación (3) es análoga a la ecuación (1), que describía la dinámica de la población labriega. La Fig. 2 representa (3) gráficamente y muestra el valor de estado estacionario y^* (diferente de cero) de la producción per cápita (y^* está asociado con el valor L^* de la Fig. 1).

4. Regímenes económicos

Galor y Weil (1999, p. 150; 2000, p. 806) caracterizan el proceso de desarrollo económico en términos de tres regímenes. En orden histórico, se denominan regímenes de crecimiento malthusiano, postmalthusiano y moderno.

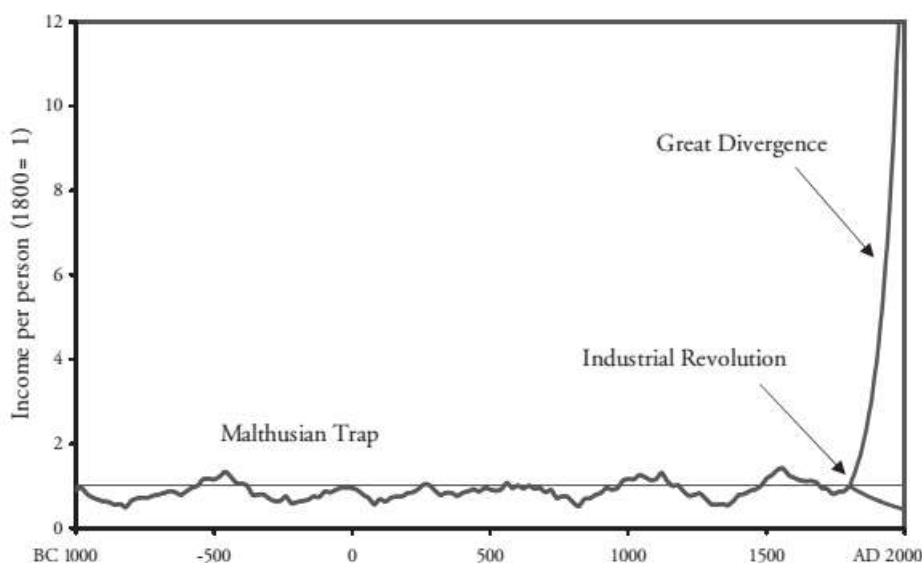
Según su caracterización, en el régimen malthusiano el progreso tecnológico y el crecimiento demográfico fueron casi insignificantes (“glaciales según los estándares modernos”), mientras que el ingreso per cápita (nivel de vida) se mantuvo prácticamente constante. Además, existe una relación positiva entre el ingreso per cápita y el crecimiento demográfico: un aumento del ingreso per cápita conlleva un aumento del crecimiento demográfico.

En el régimen postmalthusiano, el ingreso per cápita aumenta, pero la relación positiva entre el ingreso per cápita y el crecimiento demográfico se mantiene: un aumento del ingreso per cápita sigue generando crecimiento demográfico.

Por último, el régimen de crecimiento moderno es lo opuesto al régimen malthusiano: el nivel tecnológico y la renta per cápita crecen de forma constante, a un ritmo mayor que en el régimen postmalthusiano, y la relación entre renta per cápita y crecimiento demográfico se vuelve negativa, en el sentido de que un aumento de la renta per cápita conlleva una disminución de la tasa de crecimiento demográfico.

Clark (2007, p. 1) describe su percepción del pasado así (subrayado añadido):

“The basic outline of world economic history is surprisingly simple. Indeed it can be summarized in one diagram [la gráfica a continuación, tomada de Clark (2007, p. 2)]. Before 1800 income per person—the food, clothing, heat, light, and housing available per head—varied across societies and epochs. But there was no upward trend. A simple but powerful mechanism (...), the Malthusian Trap, ensured that short-term gains in income through technological advances were inevitably lost through population growth. Thus the average person in the world of 1800 was no better off than the average person of 100,000 BC. Indeed in 1800 the bulk of the world’s population was poorer than their remote ancestors.”



Clark (2007, pp. 10-11) ofrece una explicación peculiar de la entrada en el régimen de crecimiento moderno (subrayado añadido):

“Why an Industrial Revolution in England? Why not China, India, or Japan? The answer hazarded here is that England’s advantages were not coal, not colonies, not the Protestant Reformation, not the Enlightenment, but the accidents of institutional stability and demography: in particular the extraordinary stability of England back to at least 1200, the slow growth of English population between 1300 and 1760, and the extraordinary fecundity of the rich and economically successful. The embedding of bourgeois values into the culture, and perhaps even the genetics, was for these reasons the most advanced in England. Both China and Japan were headed in the same direction as England in 1600–1800 (...) but they were headed there more slowly than England (...) simply because the members of their upper social strata were only modestly more fecund than the mass of the population. Thus there was not the same cascade of children from the educated classes down the social scale.”

Allen (2008), Persson (2008) y Voth (2008) presentan objeciones al argumento de Clark. Voth (2008, pp. 150-151) responde a la explicación de la fecundidad del ascenso de Inglaterra de la siguiente manera.

“The nobility in England and other parts of Europe was not particularly successful in reproducing (...) The Chinese rich often had concubines, in part with the aim of producing as many sons as possible. Simple arithmetic suggests that any polygamous society (in which taking another wife is tied to wealth) should have produced a much steeper fertility gradient by wealth than Europe did.”

También se critica el argumento de que el crecimiento demográfico absorbió todas las ganancias de productividad antes de 1800.

“One of the major flaws of the Malthusian hypothesis (...) is that it lacks a micro-foundation in human optimizing behaviour (...) The claim that an income increase would necessarily spill over into an increase in the number of children born entails an arbitrary restriction on the choice set of households. Why would the household spend the income on more children rather than fewer and better children or on other goods?” Persson (2008, pp. 166-167)

“The most enduring empirical findings from preindustrial Europe were that population was growing – except for periods with exogenous shocks such as the Black Death – and that per capita income hence was above subsistence and differed substantially between economies. There were irrefutable signs that a few economies managed to increase average income over time slowly, for example the Netherlands, while others remained at a constant above subsistence income with positive population growth for centuries, for example Italy.” Persson (2008, p. 171)

“Observing (...) that densely populated areas seemed to have higher income and productivity levels, it would have made sense to link the rate of technological progress to population as has been done recently in New Growth Theory. That would have turned the Malthusian story upside down and focused on what really constrains pre-industrial economies: slow technological progress, which might be stimulated by population growth!” Persson (2008, p. 172)

“While it is widely believed that the preindustrial world was Malthusian, the view is controversial among economic historians.” Allen (2008, p. 948)

“Clark’s view of preindustrial England is oversimplified (...) he imagines a bipolar world of very rich and very poor (...) This vision ignores the importance of human capital in the preindustrial world and therefore misses the prosperity of the middle strata of preindustrial England. Ignoring the middle strata means overlooking much of the gain from the economic growth. The prosperity of the middle strata was due to an extensive division of labor within and between firms and to a high endowment of craft skills on which preindustrial technology depended. Human capital was essential to economic growth in the preindustrial era just as it became later.” Allen (2008, p. 954)

“Contrary to Clark, our forebearers were not enjoying abundance in a Garden of Eden. Economic growth before the Industrial Revolution was not rapid, but it did generate a higher standard of living for most people than that enjoyed by ancient foragers or early farmers.” Allen (2008, p. 955)

“Table 1 gives a summary of the kind of goods that the elderly English poor owned in the eighteenth century (...) By definition, the group of individuals to whom the data (...) refer is not rich. Yet 95% of them had chairs, half owned candlesticks and a fifth had a clock or watch. As Landes (2000, *Revolution in Time:*

Table 1. *Consumer durables in Essex pauper inventories*

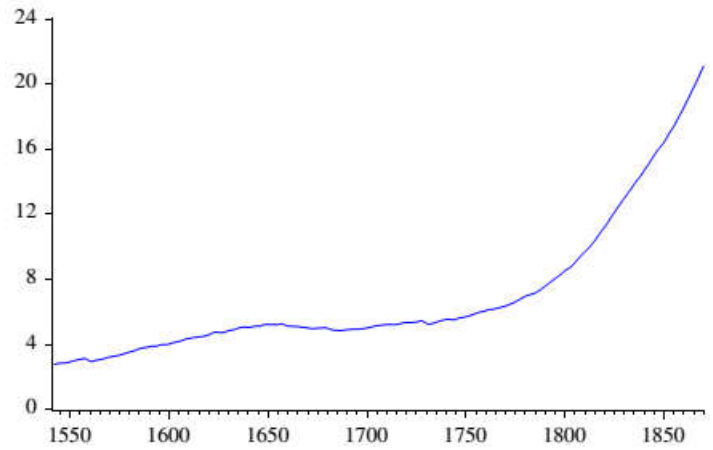
Item	% of households owning the item
Chairs	95
Chest of drawers	32
Mahogany furniture	5
Looking-glass	27
Clocks/watches	20
Pictures/prints	10
Candlesticks	49
Poker	12
Tea-related items	46

Clocks and the Making of the Modern World) points out, watches and clocks were so expensive that even by the middle of the twentieth century, they were widely considered luxury items. Their ancestors on the African savannah (with whom Clark compares the living standards of the English poor) would undoubtedly have marvelled at these possessions and would have thought them the pinnacle of luxury.” Voth (2008, p. 152)

Sobre la cuestión de por qué el mito malthusiano aún pervive, Craig (2009, p. 95) remarca que (subrayado añadido)

“Malthus remains part of the canon because subsequent generations of scholars and pundits invoked his name when forecasting economic and social catastrophes, which were the result – or, depending on your perspective, the failure – of certain policy prescriptions. Thus, whenever someone raises the specter of too many people and too little space or food, because of some policy, or the failure to adopt some other policy, Malthus is often implicated as the intellectual antecedent. But there is a difference between Hell and going to Hell, and the fact that most of the world is not Hell most of the time has meant that Malthus (or, more accurately, subsequent generations of Malthusians) has become a prime example of how wrong economists can be. In recent decades, advances in econometrics combined with new time series of historical data have created the potential for a brave new world of Malthusian scholarship.”

Craig (2009) analiza el trabajo de Crafts y Mills (2009), quienes “confirman que [la Inglaterra preindustrial] tenía una economía malthusiana en el sentido de que los salarios reales se mantuvieron estables hasta finales del siglo XVIII”. El gráfico de la derecha, tomado de Crafts y Mills (2009, p. 72), representa la población de Inglaterra (en millones) entre 1541 y 1870. ¿Cuán plausible es la afirmación de que, antes de 1800, esta población corresponde a la de una economía



sujeta a la trampa malthusiana? El gráfico sugiere que una nueva dinámica (que se manifiesta en un crecimiento exponencial de la población) comenzó ya alrededor de 1650.

Como siempre conviene recurrir a fuentes originales, merece la pena releer dos siglos después los argumentos de Malthus sobre política demográfica (subrayado añadido).

“All the children born, beyond what would be required to keep up the population to this level, must necessarily perish, unless room be made for them by the deaths of grown persons (...) the marriages and births depend principally upon the deaths, and (...) there is no encouragement to early unions so powerful as a great mortality. To act consistently therefore, we should facilitate, instead of foolishly and vainly endeavouring to impede, the operations of nature in producing this mortality (...) Instead of recommending cleanliness to the poor, we should encourage contrary habits. In our towns we should make the streets narrower, crowd more people into the houses, and court the return of the plague. In the country, we should build our villages near stagnant pools, and particularly encourage settlements in all marshy and unwholesome situations. But above all, we should reprobate specific remedies for ravaging diseases (...) If (...) the annual mortality were increased from 1 in 36 or 40, to 1 in 18 or 20, we might probably every one of us marry at the age of puberty, and yet few be absolutely starved. If, however, we all marry at this age, and yet still continue our exertions to impede the operations of nature, we may rest assured that all our efforts will be vain. Nature will not, nor cannot, be defeated in her purposes. The necessary mortality must come, in some form or other; and the extirpation of one disease will only be the signal for the birth of another perhaps more fatal.” Malthus (1826, libro IV, cap. V)

Referencias

- Allen, Robert C. (2008): “A Review of Gregory Clark’s ‘A Farewell to Alms: A Brief Economic History of the World’”, *Journal of Economic Literature* 46(4), 946-973.
- Ashraf, Quamrul; Oded Galor (2011): “Dynamics and stagnation in the Malthusian epoch”, *American Economic Review* 101(5), 2003-2041.
- Galor, Oded; David N. Weil (1999): “From Malthusian stagnation to modern growth”, *American Economic Review* 89(2), 150-154.

- Galor, Oded; David N. Weil (2000): "Population, technology, and growth: From Malthusian stagnation to the demographic transition and beyond", *American Economic Review* 90(4), 806-828.
- Clark, Gregory (2007): *A Farewell to Alms: A Brief Economic History of the World*, Princeton University Press.
- Crafts, Nicholas; Terence C. Mills (2009): "From Malthus to Solow: How did the Malthusian economy really evolve?", *Journal of Macroeconomics* 31, 68-93.
- Craig, Lee (2009): "Comment on 'From Malthus to Solow: How did the Malthusian economy really evolve?' ", *Journal of Macroeconomics* 31, 94-97.
- Malthus, Thomas Robert (1826): *An Essay on the Principle of Population*, sexta edición, John Murray.
- Persson, Karl Gunnar (2008): "The Malthus delusion", *European Review of Economic History* 12, 165-173.
- Voth, Hans-Joachim (2008): "Clark's intellectual Sudoku", *European Review of Economic History* 12, 149-155.