4. Modelo 1: Manipulación mediante la destrucción de bien

1. Descripción de la economía: el Modelo 1 con tamaños de grupos diferentes

• Hay un único bien que no puede producirse ni acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de individuos, G1 (con m miembros) y G2 (con n miembros).

• Se vive dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde es c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• La dotación de cada miembro de G1 es (1 , 0): una unidad de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2 , 2): dos unidades de joven y dos de mayor.

• Previamente se ha considerado el caso en que los prestamistas retienen bien y prestan menos de lo que establece el resultado de equilibrio competitivo. Ahora se considera una alternativa más drástica de manipulación: destruir bien, no redigir su uso (de préstamo a consumo).

• Específicamente, los prestamistas (los jóvenes de G1) acuerdan forzar un aumento de la tasa de interés en el mercado de préstamos comprometiéndose cada prestamista a destruir la cantidad $\varepsilon > 0$ de su dotación de joven.

2. Decisiones

• **Decisiones de los jóvenes de G1.** El problema de todo joven de G1 es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sujeto a} & c_1 + l_1 = 1 - \varepsilon \\ & c_1' = R \cdot l_1. \end{array}$$

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar } \ u_1 = (1 - l_1 - \varepsilon) \cdot R \cdot l_1.$$

Maximizar respecto de l_1 requiere

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = R \cdot (1 - 2l_1 - \varepsilon).$$

Esto es,

$$\boxed{l_1 = \frac{1 - \varepsilon}{2}\,.} \tag{1}$$

• **Decisiones de los jóvenes de G2.** El problema de todo joven de G2 es

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ &\text{sujeto a} \quad\;\; c_2 + l_2 = 2 \\ &\qquad\qquad\quad\; c_2' = 2 + R \cdot l_2. \end{aligned}$$

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar} \;\; u_2 = (2 - l_2) \cdot (2 + R \cdot l_2).$$

Maximizar respecto de l_2 requiere

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = 2R - 2 - 2R \cdot l_2.$$

El resultado:

$$\boxed{l_2 = 1 - \frac{1}{R}\,.} \tag{2}$$

3. Equilibrio

• **Equilibrio en el mercado de préstamos.** Empleando (1), (2) y la condición de equilibrio

$$m \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$$

se obtiene, para cada período,

$$m \cdot \frac{1 - \varepsilon}{2} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

o

$$\boxed{R = \frac{2n}{2n + m - m\varepsilon}\,.} \tag{3}$$

Dado que los tamaños m y n de los grupos son constantes, existe un valor α tal que $m = \alpha \cdot n$. El parámetro α permite reducir el número de variables en la ecuación que define R. En concreto,

$$R = \frac{2n}{2n + m(1 - \varepsilon)} = \frac{2n}{2n + \alpha n(1 - \varepsilon)} = \frac{2}{2 + \alpha(1 - \varepsilon)}\,.$$

Con (1) y la restricción presupuestaria de joven, el consumo de cada joven de G1 es

$$c_1 = 1 - l_1 - \varepsilon = 1 - \frac{1 - \varepsilon}{2} - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon}{2}\,.$$

Combnando (1) y (3), el consumo de cada mayor de G1 es

$$c_1' = R \cdot l_1 = \frac{2}{2+\alpha(1-\varepsilon)} \cdot \frac{1-\varepsilon}{2} = \frac{1-\varepsilon}{2+\alpha(1-\varepsilon)}.$$

La utilidad correspondiente de cada joven de G1 es

$$u_1 = c_1 \cdot c_1' = \frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \frac{1-\varepsilon}{2+\alpha(1-\varepsilon)} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{4+2\alpha(1-\varepsilon)}.$$

Si $\varepsilon = 0$, la utilidad de cada joven de G1 es

$$u_1^0 = c_1^0 \cdot c_1'^0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2+\alpha}\right) = \frac{1}{4+2\alpha}.$$

Se trata de comprobar si $u_1 > u_1^0$. Esta desigualdad equivale a

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{4+2\alpha(1-\varepsilon)} > \frac{1}{4+2\alpha}$$

o

$$4\varepsilon - 8 + 2\alpha\varepsilon - 4\alpha > -2\alpha$$

o

$$\varepsilon(\alpha+2) > \alpha+4$$

o

$$\boxed{\varepsilon > \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.} \tag{4}$$

La desigualdad (4) es la <u>condición necesaria y suficiente para que la destrucción de ε unidades del bien para todos los jóvenes de G1 aumente la utilidad de los jóvenes de G1</u> (con respecto al valor de utilidad que se obtendría con $\varepsilon = 0$).

La desigualdad (4) no se cumple: $\frac{\alpha+4}{\alpha+2} > 1$ pero ε no puede ser superior a 1, puesto que es un valor limitado por la dotación de una unidad.

4. ¿Y si los prestatarios destruyen dotación?

• **Decisiones de los jóvenes de G2.** El problema de todo joven de G2 es

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ &\text{sujeto a} \quad c_2 + l_2 = 2 - \varepsilon \\ &\qquad\qquad\quad c_2' = 2 + R \cdot l_2. \end{aligned}$$

Introducidas las dos retricciones en la función objetivo, se trata de

$$\text{maximizar } \ u_2 = (2 - l_2 - \ \varepsilon) \cdot (2 + R \cdot l_2).$$

Maximizar respecto de l_2 requiere

$$0 = \frac{du_2}{dl_2} = 2R - 2 - 2R \cdot l_2 - \varepsilon R.$$

El resultado:

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para los jóvenes de G1,

$$l_1 = \frac{1}{2}.$$

En el equilibrio del mercado,

$$m \cdot \frac{1}{2} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

o

$$\boxed{R = \frac{2n}{2n + m - \varepsilon n}.} \tag{5}$$

Recordando que $m = \alpha \cdot n$,

$$R = \frac{2n}{2n + m - \varepsilon n} = \frac{2}{2 + \alpha - \varepsilon}.$$

El consumo de cada joven de G2 es

$$c_2 = 2 - l_2 - \varepsilon = 2 - \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon = 1 + \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 - \varepsilon}{2} + \frac{2 + \alpha - \varepsilon}{2} = \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2}.$$

El consumo de cada mayor de G2 es

$$c_2' = 2 + R \cdot l_2 = 2 + R \cdot \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + R - 1 - \frac{\varepsilon R}{2} = 1 + R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$c_2' = 1 + R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + \frac{2}{2 + \alpha - \varepsilon} \cdot \frac{2 - \varepsilon}{2} = \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2 + \alpha - \varepsilon}.$$

La utilidad de cada joven de G2 es

$$u_2 = c_2 \cdot c_2' = \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2} \cdot \frac{4 + \alpha - 2\varepsilon}{2 + \alpha - \varepsilon} = \frac{(4 + \alpha - 2\varepsilon)^2}{4 + 2\alpha - 2\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon = 0$, la utilidad de cada joven de G2 es

$$u_2^0 = c_2^0 \cdot c_2'^0 = \frac{4 + \alpha}{2} \cdot \frac{4 + \alpha}{2 + \alpha} = \frac{(4 + \alpha)^2}{4 + 2\alpha}.$$

Se trata de comprobar si $u_2 > u_2^0$. Esta desigualdad equivale a

$$\frac{(4+\alpha-2\varepsilon)^2}{4+2\alpha-2\varepsilon} > \frac{(4+\alpha)^2}{4+2\alpha},$$

que no se cumple. Para comprobarlo, sea $A = 4 + \alpha$y $B = 4 + 2\alpha$. Ahora la desigualdad es

$$\frac{(A-2\varepsilon)^2}{B-2\varepsilon} > \frac{\mathrm{A}^2}{B}$$

o

$$\mathrm{A}^2 B - 4\varepsilon^2 B - 4\varepsilon AB > \mathrm{A}^2 B - 2\varepsilon \mathrm{A}^2$$

o

$$-2\varepsilon B - 2AB > -\mathrm{A}^2$$

o

$$\varepsilon < \frac{\mathrm{A}^2 - 2AB}{2B} = \frac{\mathrm{A}^2}{2B} - A$$

o

$$\varepsilon < \frac{(4+\alpha)^2}{2(4+2\alpha)} - (4+\alpha) = (4+\alpha)\left(\frac{4+\alpha}{4(2+\alpha)} - 1\right) = \frac{4+\alpha}{8+4\alpha}(-4-3\alpha) < 0,$$

que contradice la condición $\varepsilon > 0$.

Conclusión: por muy pequeño que sea $\varepsilon > 0$, la <u>destrucción de ε unidades del bien para todos los jóvenes de G2 no incrementa la utilidad de los jóvenes de G2</u> (con respecto al valor de utilidad que obtendrían con $\varepsilon = 0$).

Por ejemplo, si $\alpha = 1$, la desigualdad es

$$\frac{(5-2\varepsilon)^2}{6-2\varepsilon} > \frac{25}{6}$$

que equivale a

$$6 \cdot (25 + 4\varepsilon^2 - 20\varepsilon) > 150 - 50\varepsilon$$

o

$$12\varepsilon > 35$$

o

$$\varepsilon < -35/12.$$

Conclusión final: <u>la estrategia de destruir dotación del bien para provocar un resultado más favorable en el funcionamiento del mercado de préstamos ni funciona con los prestamistas ni funciona con los prestatarios</u>.

5. Cuando consumo presente y futuro no son substitutos perfectos

Ahora los jóvenes de G1 tienen función de utilidad $u_1 = {c_1}^{\beta} \cdot c_1'$, donde $\beta > 0$. Cuanto mayor β, más valor tiene el consumo presente en relación con el consumo futuro. El parámetro β es una medida de paciencia: cuanto mayor β, más se valora el presente y, por tanto, menos paciencia se tiene.

• **Decisiones de los jóvenes de G1.** El problema de todo joven de G1 es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u_1 = {c_1}^{\beta} \cdot c_1' \\ \text{sujeto a} & c_1 + l_1 = 1 - \varepsilon \\ & c_1' = R \cdot l_1. \end{array}$$

que equivale a

$$\text{maximizar } \; u_1 = (1 - l_1 - \varepsilon)^{\beta} \cdot R \cdot l_1 \, .$$

Maximizar respecto de l_1 requiere

$$0 = \frac{du_1}{dl_1} = (1 - l_1 - \varepsilon)^{\beta} - \beta l_1 (1 - l_1 - \varepsilon)^{\beta - 1}.$$
$$0 = 1 - l_1 - \varepsilon - \beta l_1.$$

En suma,

$$l_1 = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta}.$$

• **Decisiones de los jóvenes de G2.** El problema ya ha sido resuelto en §2: la ecuación (2).

• **Equilibrio en el mercado de préstamos.** La condición de equilibrio $m \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$ se concreta en

$$m \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta} + n \cdot \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 0$$

o

$$\boxed{R = \frac{n(1 + \beta)}{n(1 + \beta) + m - m\varepsilon}.}$$

Definiendo $m = \alpha \cdot n$,

$$R = \frac{1 + \beta}{1 + \beta + \alpha(1 - \varepsilon)}.$$

El consumo de cada joven de G1 es

$$c_1 = 1 - l_1 - \varepsilon = 1 - \frac{1 - \varepsilon}{1 + \beta} - \varepsilon = \frac{\beta(1 - \varepsilon)}{1 + \beta}.$$

El consumo de cada mayor de G1 es

$$c_1' = R \cdot l_1 = \frac{1+\beta}{1+\beta+\alpha(1-\varepsilon)} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\beta} = \frac{1-\varepsilon}{1+\beta+\alpha(1-\varepsilon)}.$$

La utilidad de cada joven de G1 es

$$u_1 = c_1 \cdot c_1' = \frac{\beta(1-\varepsilon)}{1+\beta} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\beta+\alpha(1-\varepsilon)} = \frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{(1+\beta)(1+\beta+\alpha(1-\varepsilon))}.$$

Si $\varepsilon = 0$, la utilidad de cada joven de G1 es

$$u_1^0 = c_1^0 \cdot c_1'^0 = \frac{\beta^2}{(1+\beta)(1+\beta+\alpha)}.$$

Se trata de comprobar si $u_1 > u_1^0$. Esta desigualdad equivale a

$$\frac{\beta(1-\varepsilon)^2}{(1+\beta)(1+\beta+\alpha(1-\varepsilon))} > \frac{\beta^2}{(1+\beta)(1+\beta+\alpha)}$$

o

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\beta+\alpha(1-\varepsilon)} > \frac{\beta}{1+\beta+\alpha}$$

o

$$\boxed{1+\alpha+\varepsilon\big(\alpha\beta+(\varepsilon-2)(1+\beta+\alpha)\big) > \beta(\beta+\alpha).} \tag{6}$$

Si la condición (6) se cumple, los prestamistas jóvenes de G1 incrementan la utilidad destruyendo ε unidades de su dotación.

Proposición. *Si* $\beta < 1$, *entonces para todo* $\alpha > 0$ *existe* $\varepsilon > 0$ *que hace que* (6) *se cumpla* .

Demostración . La demostración es inmediata. Si ε está lo suficientemente cerca de cero,

$$1+\alpha+\varepsilon\big(\alpha\beta+(\varepsilon-2)(1+\beta+\alpha)\big) \approx 1+\alpha.$$

Por esta razón, (6) es aproximadamente equivalente a

$$1+\alpha > \beta(\beta+\alpha).$$

Por la hipótesis $\beta < 1$,

$$\beta(\beta+\alpha) < \beta+\alpha$$

y, además,

$$\beta+\alpha < 1+\alpha.$$

Conclusión: con un ε suficientemente pequeño y con $\beta < 1$, (6) se satisface. ■

El análisis de §3 demuestra que $\beta < 1$ es una condición necesaria para el resultado: con $\beta = 1$ la desigualdad (6) no se cumple. Si $\beta = 1$, (6) se transforma en

$$\varepsilon\big(\alpha + (\varepsilon - 2)(2 + \alpha)\big) > 0$$

o

$$-\varepsilon\big(2(2 - \varepsilon) + \alpha(1 - \varepsilon)\big) > 0$$

desigualdad que no es cierta porque $0 < \varepsilon \leq 1$.

La condición $\beta < 1$ significa que los prestamistas valoran menos el consumo presente que el consumo futuro. Alternativamente, $\beta < 1$ implica que compensa esperarse al futuro: entre consumir una unidad del bien en el presente y consumirla en el futuro, es más útil consumirla en el futuro. Esto significa que los prestamistas son pacientes: un premio futuro es preferible a un premio presente.

A la inversa, ser impaciente ($\beta \geq 1$) y así valorar más la recompensa inmediata a la recompensa futura, impide a los prestamistas obtener un beneficio de la destrucción de dotación.