2. Modelo 1: Paretoineficiencia del equilibrio y transferencias

1. La asignación de consumo del Modelo 1 no es Paretoeficiente

• **Paretoineficiencia.** En el Modelo 1, una asignación puede representarse mediante un vector de consumos $C = (c_1, c_1', c_2, c_2')$ que indican la cantidad de bien que una persona de cada grupo consume de joven y de mayor. Esta asignación es Paretoeficiente si no existe ninguna otra asignación $\tilde{C} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_1', \tilde{c}_2, \tilde{c}_2')$ tal que

$$u_1(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1') > u_1(c_1, c_1'),$$

$$u_2(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2') > u_2(c_2, c_2'),$$

$$u_1'(\tilde{c}_1') > u_1'(c_1') \text{ y}$$

$$u_2'(\tilde{c}_2') > u_2'(c_2').$$

La asignación alternativa $\tilde{C}$ otorgaría a toda persona más utilidad que la asignación de partida C. Simétricamente, la asignación (c_1, c_1', c_2, c_2') es Pareto ineficiente si existe alguna otra asignación $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1', \tilde{c}_2, \tilde{c}_2')$ que satisface las cuatro desigualdades anteriores.

• **Paretoineficiencia de la asignación de consumo de equilibrio.** La asignación de consumo C de equilibrio en el Modelo 1 es

$$(c_1, c_1') = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right) \text{ y } (c_2, c_2') = \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{3}\right).$$

La asignación de consumo $\tilde{C}$ definida a continuación demuestra que la asignación de equilibrio es Paretoineficiente. La asignación $\tilde{C}$ se obtiene de la de equilibrio

(i) emparejando cada joven con un mayor, de manera que cada mayor queda simultáneamente emparejado con sólo un joven (es decir, se establece una biyección entre el grupo de jóvenes y el de mayores) y

(ii) haciendo que cada joven entregue $\varepsilon > 0$ unidades del bien a la persona mayor con la que está emparejado (siendo ε suficientemente pequeño).

Específicamente, $\tilde{C}$ es la asignación tal que

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1') = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon\right)$$

y

$$(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2') = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon, \frac{5}{3} + \varepsilon\right).$$

En el equilibrio C, la utilidad de todo joven de G1 es

$$u_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

y la de todo joven de G2 es

$$u_2\left(\frac{5}{2},\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{6}.$$

En $\tilde{C}$, las utilidades son

$$u_1\left(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon\right)=\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\varepsilon\right)=\frac{1}{6}+\varepsilon\left(\frac{1}{6}-\varepsilon\right)$$

para cada miembro joven de G1 y

$$u_2\left(\frac{5}{2}-\varepsilon,\frac{5}{3}+\varepsilon\right)=\left(\frac{5}{2}-\varepsilon\right)\cdot\left(\frac{5}{3}+\varepsilon\right)=\frac{25}{6}+\varepsilon\left(\frac{5}{6}-\varepsilon\right)$$

para cada miembro joven de G2 .

En consecuencia, para que la utilidad de cada miembro joven de G1 sea mayor en $\tilde{C}$ que en C es necesario que $\varepsilon\left(\frac{1}{6}-\varepsilon\right)>0$; esto es, es necesario que

$$\varepsilon<\frac{1}{6}.$$

De manera análoga, para que la utilidad de cada miembro joven de G2 sea superior en $\tilde{C}$que en C es necesario que $\varepsilon\left(\frac{5}{6}-\varepsilon\right)>0$; es decir, es necesario que

$$\varepsilon<\frac{5}{6}.$$

En suma, la transferencia de jóvenes a mayores de cualquiera $\varepsilon<\frac{1}{6}$ hace que todos los jóvenes tengan más utilidad en $\tilde{C}$ que en C.

En relación con los mayores, en C, en cada período un miembro grande de G1 consume $\frac{1}{3}$ unidades del bien, en tanto que, en $\tilde{C}$, consume $\frac{1}{3}+\varepsilon$.

Respecto de los mayores de G2, cada uno de ellos consume $\frac{5}{3}$ en C y $\frac{5}{3}+\varepsilon$ en $\tilde{C}$.

La conclusión es que todos los consumidores mayores consumen más (y así obtienen mayor utilidad) en $\tilde{C}$ que en C.

Todo lo anterior demuestra que C no es Paretoeficiente: existe otra asignación $\tilde{C}$ en la que toda persona tienen más utilidad que en C en todos sus períodos de vida.

• **¿Por qué el equilibrio no es Paretoeficiente?** ¿Qué pasaría si la economía existiera sólo por un período finito de tiempo? En este caso la redistribución que crea la asignación $\tilde{C}$ no sería válida para demostrar la Paretoineficiencia de C: en el último período los jóvenes perderían transfiriendo ε a los mayores y no podrían ser compensados en el período siguiente con la recepción de ε porque no hay más períodos.

Esto sugiere que la causa de la ineficiencia está relacionada con un doble infinito: la infinita duración de la economía y el infinito número de personas. El mecanismo de transferencias que genera $\tilde{C}$ es posible porque cada joven que sacrifica parte de su consumo ahora transfiriéndolo a personas mayores puede ser compensado en el futuro por algún otro joven. Por tanto, siempre tiene que haber algún período más y alguna persona más.

[La paradoja del hotel infinito ilustra que las intuiciones en un mundo finito no siempre son válidas en un mundo infinito. En un hotel finito completo no existe espacio para otro cliente. En cambio, en un hotel (contable) infinito completo hay sitio para un nuevo cliente: para toda habitación $h \geq 1$, se mueve el cliente que ocupa h en la habitación $h+1$, por lo que no se desaloja a nadie del hotel y el nuevo cliente puede ocupar la habitación 1.]

2. Transferencias óptimas

• **Pensiones de reparto.** La demostración anterior de la Paretoineficiencia de la asignación de equilibrio implícitamente define un sistema de pensiones de reparto: partiendo de la asignación de equilibrio, se puede mejorar si cada joven transfiere a un mayor una cierta cantidad $\varepsilon < \frac{1}{6}$ de bien.

• **Optimalidad.** Una cuestión que sugiere el mecanismo de transferencias que ha demostrado la Paretoineficiecia del resultado del mercado competitivo es encontrar una transferencia que sea óptima en algún sentido. Si el objetivo que pretende la transferencia es superar la Paretoineficiencia, entonces existe un continuo de transferencias óptimas: todas con $\varepsilon < \frac{1}{6}$.

Un objetivo alternativo, más exigente, sería que la transferencia maximice alguna función de bienestar social. Un candidato natural a función de bienestar social es la suma (quizá ponderada) de la utilidad de todas las personas.

Las funciones de utilidad a continuación son las que se obtienen una vez aplicada la transferencia/impuesto $\varepsilon > 0$,

$$u_1^\varepsilon = (c_1 - \varepsilon) \cdot (c_1' + \varepsilon)$$

$$u_2^\varepsilon = (c_2 - \varepsilon) \cdot (c_2' + \varepsilon)$$

$$u_1'^\varepsilon = c_1' + \varepsilon$$

$$u'^\varepsilon_2 = c_2' + \varepsilon.$$

Una posible función de bienestar social es la suma de todas las utilidades de las personas de un mismo período. Entonces se trataría de encontrar los valores de ε que maximizan la suma de utilidades $u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon + u_1'^\varepsilon + u_2'^\varepsilon$ (dado que la función de utilidad de una persona mayor en el período t coincide con la que tendrá en $t+1$ un joven de t del mismo grupo que el mayor). La resolución de este problema se deja como ejercicio.

Se resuelve a continuación uno similar: elegir ε para maximizar la suma de la utilidad de los jóvenes asumiendo que la transferencia ε se aplica sobre la asignación de consumo y que la utilidad después de la transferencia no empeora la utilidad de la asignación de consumo de equilibrio. Esto es, se trata de

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad u_1^{\varepsilon} + u_2^{\varepsilon} \quad \text{respecto de } \varepsilon \\ &\text{sujeto a} \quad u_1^{\varepsilon} \geq u_1(c_1, c_1') = u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \\ &\qquad\qquad\; u_2^{\varepsilon} \geq u_2(c_2, c_2') = u_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) = \frac{25}{6}. \end{aligned}$$

Introduciendo las restricciones en la función objetivo, se trataría de maximizar con respecto a ε

$$u_1^{\varepsilon} + u_2^{\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) + \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{5}{3} - \varepsilon\right) = \frac{13}{3} + \varepsilon - 2\varepsilon^2.$$

Claramente,

$$0 = \frac{d(u_1^{\varepsilon} + u_2^{\varepsilon})}{d\varepsilon} = 1 - 4\varepsilon\,.$$

De lo anterior se deduce que $\varepsilon = 1/4$ sería un valor candidato a maximizar $u_1^{\varepsilon} + u_2^{\varepsilon}$. El problema es que $\varepsilon = 1/4$ no respeta la tercera restricción $u_1^{\varepsilon} \geq u_1(c_1, c_1') = \frac{1}{6}$ del problema, puesto que, cuando $\varepsilon = 1/4$, se tiene que $u_1^{\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} < \frac{1}{6}$.

Resumiendo, el valor óptimo de ε sería el más cercano a $\varepsilon = 1/4$ que fuera admisible (por la izquierda): $\varepsilon = 1/6$ (esto es, el mayor valor de ε que, en §1, hacía la asignación de consumo Paretoineficiente).