Un modelo de generaciones solapadas con producción

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que puede producirse y acumularse. Cada período nacen dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Toda persona vive dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene $u = c \cdot c'$ como función de utilidad, donde c es el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Toda persona mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Hay dos factores de producción: 'trabajo' (los servicios de producción que proporcionan las personas) y 'capital' (bien acumulado que representa medios de producción físicos). El trabajo no es acumulable: sólo se puede utilizar en el período en que se dispone. Trabajo y capital se intercambian en mercados competitivos. No existe mercado de préstamos del bien.

• La dotación de las personas es de factor trabajo. La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0): una unidad laboral de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2, 2): dos unidades de trabajo de joven y dos de mayor.

• Hay una función de producción agregada que establece la cantidad total Y del bien que se produce durante un período t a partir de la cantidad total de trabajo L disponible en t y la cantidad total de capital K disponible en t. La función de producción en cada período es

$$Y = 2\, K^{1/2}\, L^{1/2}\,.$$

2. Decisiones

• **Decisiones.** Las personas obtienen utilidad sólo del consumo del bien, pero de entrada no tienen: las dotaciones son trabajo, no bien. Por este motivo, se ofrece trabajo en un mercado (competitivo) de trabajo a cambio de un salario ω (pagado en bien). Dado que no existe mercado de préstamos del bien, la única manera de ahorrar para los jóvenes es acumular bien en forma de capital y vender ese capital en el período siguiente a cambio de un precio σ.

• **Decisiones de acumulación de capital de los miembros jóvenes de G1.** Todo joven de G1 desea

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_1 = c_1\, c_1' \ \text{ respecto de } c_1,\ c_1' \text{ y } k_1' & \\ \text{sujeto a} & c_1 + k_1' = 1\omega & \text{(restricción presente, de joven)} \\ & c_1' = \sigma' k_1' & \text{(restricción futura, de mayor)} \end{array}$$

donde c_1 es el consumo de joven, c_1' el consumo de mayor, k el volumen de bien acumulado de joven en forma de capital pero que se utilizará de mayor, ω el salario (el precio del factor trabajo) de joven y σ' el precio del factor capital cuando los jóvenes sean mayores. Dividiendo por σ' la segunda restricción y sumando las dos se obtiene la restricción presupuestaria vital:

$$c_1 + \frac{c_1'}{\sigma'} = \omega\,.$$

Esta expresión dicta que el salario total obtenido de joven financia, en términos reales, el consumo de joven y de mayor. Relacionando este con el caso con sólo mercado de préstamos, el precio del capital σ' definiría un tipo de interés.

Dado que lo importante es determinar el volumen de capital k_1' acumulado de joven, el problema puede resolverse directamente introduciendo las restricciones presupuestarias en la función utilidad. Así, todo joven quiere

$$\text{maximizar } \; u_1 = (\omega - k_1')\, \sigma' k_1' \; \text{ respecto de } k_1' \,.$$

Por la hipótesis de que los mercados son competitivos, ω y σ' son considerados datos. Por ello, el problema anterior es equivalente a

$$\text{maximizar } \; u_1 = (\omega - k_1')\, k_1' \; \text{ respecto de } k_1' \,.$$

La solución:

$$\boxed{k_1' = \omega/2.}$$

Consecuentemente, todo joven de G1 ahorra, en forma de capital, la mitad del salario que recibe.

• **Decisiones de acumulación de capital de los miembros jóvenes de G2.** Todo joven de G2 se propone

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & u_2 = c_2\, c_2' \; \text{ respecto de } c_2,\, c_2' \text{ y } k_2' & \\ \text{sujeto a} & c_2 + k_2' = 2\omega & \text{(restricción presente, de joven)} \\ & c_2' = 2\omega' + \sigma' k_2' & \text{(restricción futura, de mayor)} \end{array}$$

donde c_2 es el consumo de joven, c_2' el consumo de mayor, k_2' el volumen de bien acumulado de joven en forma de capital pero que se utilizará de mayor, ω el salario (el precio del factor trabajo) de joven, ω' el salario de mayor y σ' el precio del factor capital de mayor. Dividiendo por σ' la segunda restricción y sumando las dos se obtiene la restricción presupuestaria vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{\sigma'} = \omega + \frac{2\omega'}{\sigma'} \,.$$

Según esta restricción, interpretando $1/\sigma'$ como factor de descuento que expresa bien futuro en términos de bien presente, el valor descontado de todos los ingresos salariales $\omega + \frac{2\omega'}{\sigma'}$ de una persona coincide con el valor descontado $c_2 + \frac{c_2'}{\sigma'}$ del consumo que hace la persona a lo largo de su vida.

Insertando las restricciones presupuestarias en la función utilidad, todo joven de G2 tiene como objetivo

$$\text{maximizar } \; u_2 = (2\omega - k_2')(2\omega' + \sigma' k_2') \; \text{ respecto de } k_2' \,.$$

La condición necesaria de máximo (que en este caso también es suficiente) es

$$0 = \frac{du_2}{dk_2'} = 2\omega\sigma' - 2\omega' - 2\sigma' k_2'$$

y, así,

$$\boxed{k_2' = \omega - \frac{\omega'}{\sigma'}.}$$

Esta expresión indica que el ahorro de todo joven de G2 depende de los precios de todos los factores que vende: del precio del trabajo de joven ω, del precio del trabajo de mayor ω' y del precio del capital de mayor σ' (por hipótesis del modelo, los jóvenes no pueden emplear capital).

3. Mercados

• **Precio del factor trabajo.** En tanto que mercado competitivo, el salario (el precio del factor trabajo) en el período t iguala la oferta total de trabajo en t con la demanda total de trabajo en t. Pero como la función de producción agregada tiene rendimientos de escala constantes se puede aplicar un atajo: el salario en un mercado competitivo (que represente a la totalidad de la economía) coincide con la productividad marginal del factor trabajo en la economía.

La productividad marginal del trabajo es la derivada de la función de producción de la economía respecto al trabajo:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(2K^{1/2}L^{1/2})}{dL} = 2K^{1/2}\frac{d(L^{1/2})}{dL} = 2K^{1/2}\frac{1}{2}L^{-1/2} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Este resultado es válido cada período. Por consiguiente,

$$\boxed{\omega' = \left(\frac{K'}{L'}\right)^{\frac{1}{2}}.}$$

• **Precio del factor capital.** El mismo argumento se aplica al precio del capital: coincide con la productividad marginal del factor capital. La productividad marginal del capital es la derivada de la función de producción de la economía respecto al capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(2K^{1/2}L^{1/2})}{dK} = 2L^{1/2}\frac{d(K^{1/2})}{dK} = 2L^{1/2}\frac{1}{2}K^{-1/2} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Análogamente, en el período siguiente,

$$\boxed{\sigma' = \left(\frac{L'}{K'}\right)^{\frac{1}{2}}.}$$

• **Cantidad total de factores cada período.** Cada período hay n jóvenes de G1, n jóvenes de G2, n mayores de G1 y n mayores de G2 . Esto hace que la cantidad total de factor trabajo que los jóvenes aportan cada período sea

$$n \cdot 1 + n \cdot 2,$$

que la cantidad total de factor trabajo que los mayores aportan cada período sea

$$n \cdot 0 + n \cdot 2$$

y que, como resultado, la cantidad total Lde factor trabajo existente cada período sea

$$L = n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 0 + n \cdot 2 = 5n.$$

De lo anterior se deduce que $L' = L$.

En relación con el capital, los mayores son los únicos que lo aportan cada período. Así pues, la cantidad total K de factor capital existente en un período es la suma del capital nk_1 que aportan los n mayores de G1 y del capital nk_2 que aportan los n mayores de G2:

$$K = nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2).$$

En este caso,

$$K' = nk_1 + nk_2 = n({k_1}' + {k_2}').$$

Definiendo

$$\boxed{k = k_1 + k_2}$$

las expresiones serían

$$K = nk$$

$$K' = nk'.$$

• **Cálculo de precios de los factores de producción.** La fórmula del salario de equilibrio

$$\omega = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

depende del stock total corriente de los factores de producción. Se deduce pues que

$$\omega = \left(\frac{nk}{5n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k}{5}\right)^{1/2}$$

$$\omega' = \left(\frac{k'}{5}\right)^{1/2}$$

$$\sigma = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5n}{nk}\right)^{1/2} = \left(\frac{5}{k}\right)^{1/2}$$

y

$$\sigma' = \left(\frac{5}{k'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Dinámica y estados estacionarios

• **Obtención de la trayectoria de acumulación de capital.** La trayectoria de acumulación del capital se obtiene de la definición de capital per cápita

$$k' = k_1' + k_2'$$

sustituyendo las expresiones de los recién obtenidos precios de los factores de producción (se emplea el valor desfasado k' por conveniencia, dado que las fórmulas del capital acumulado por los jóvenes se refieren al período donde son mayores). En resumen,

$$k' = k_1' + k_2' = \frac{\omega}{2} + \left(\omega - \frac{\omega'}{\sigma'}\right) = \frac{3}{2}\omega - \frac{\omega'}{\sigma'} = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{k'}{5}\right)^{1/2}}{\left(\frac{5}{k'}\right)^{1/2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k'}{5}.$$

Despejando k',

$$k' = \frac{5}{6}\frac{3}{2}\frac{k^{1/2}}{5^{1/2}} = \frac{5^{1/2}}{4}k^{1/2}.$$

La expresión final

$$\boxed{k' = \frac{5^{1/2}}{4}\,k^{1/2}.} \tag{1}$$

establece la dinámica de la acumulación per cápita (esto es, por joven) de capital. Si interesase la dinámica de la acumulación del stock total Kde capital, bastaría con multiplicar por n, dado que $K = nk$:

$$K' = nk' = n\frac{5^{1/2}}{4}k^{1/2} = \frac{5^{1/2}}{4}n^{1/2}n^{1/2}k^{1/2} = \frac{(5n)^{1/2}}{4}(nk)^{1/2} = \left(\frac{5n}{16}\right)^{\frac{1}{2}}K^{1/2}.$$

La función (1) es creciente (ya que $\frac{dk'}{dk} = \frac{5^{1/2}}{16}\frac{1}{k^{1/2}} > 0$), cóncava (porque $\frac{d^2k'}{dk^2} = -\frac{5^{1/2}}{3\ 2}\frac{1}{k^{3/2}} < 0$) y pasa por el origen.

La Fig. 1 representa gráficamente la dinámica o trayectoria (1) del capital per cápita y los estados estacionarios de esta trayectoria (los valores que satisfacen al mismo tiempo la ecuación (1) y la condición de estacionariedad $k' = k$).

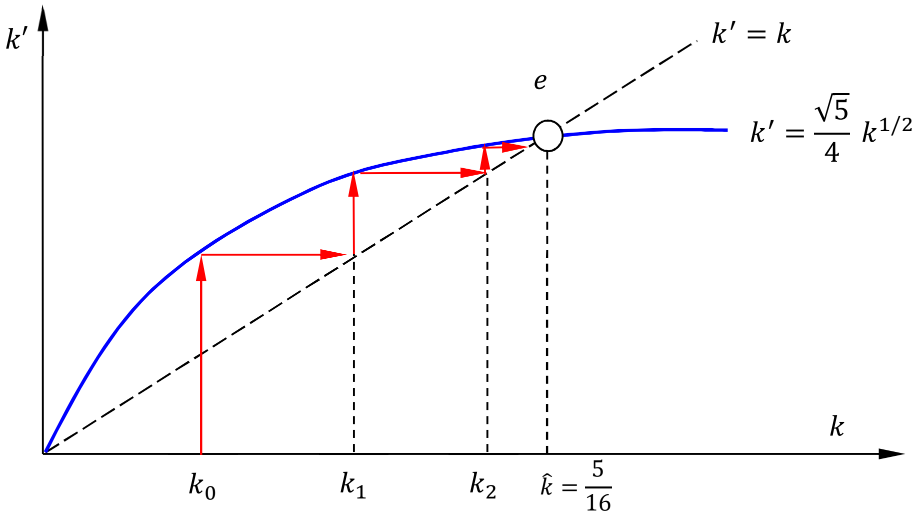

Fig. 1. Dinámica del capital per cápita y estados estacionarios de la dinámica ($k = 0$ y $k = \hat{k} = 5/16$)

• **Estados estacionarios de la trayectoria de acumulación de capital.** Todo estado estacionario de la trayectoria de acumulación del capital (1) satisface

$$k' = \frac{\sqrt{5}}{4}\sqrt{k}$$

y

$$k' = k.$$

Geométricamente, los estados estacionarios se corresponden con los puntos de intersección entre la diagonal principal $k' = k$ y la curva definida por (1). En la Fig. 1, estos puntos son el origen (con valor asociado $k = 0$) y punto e con valor asociado $k = \hat{k}$.

La Fig. 1 muestra que el estado estacionario con capital per cápita $\hat{k}$ es estable. Si, por ejemplo, el capital per cápita inicial es $k_0 < \hat{k}$, entonces la dinámica (1) acerca el valor del capital per cápita a $\hat{k}$. Se deja como ejercicio mostrar gráficamente que la convergencia hacia $\hat{k}$ también se produce si se parte de un valor superior a $\hat{k}$.

Solucionando el sistema de dos ecuaciones y definiendo $k' = k = \hat{k}$, se sigue que

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\hat{k}^{1/2}$$

y (descartando la solución $\hat{k} = 0$)

$$\hat{k}^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

y, así,

$$\boxed{\hat{k} = \frac{5}{16}.}$$

Sabido el valor no nulo del capital per cápita de estado estacionario, se pueden determinar todos los valores de estado estacionario de las demás variables del modelo:

$$\hat{\omega} = \left(\frac{\hat{k}}{5}\right)^{1/2} = \left(\frac{5/16}{5}\right)^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{5}{\hat{k}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\hat{\omega}} = 4$$

$$\hat{k}_1 = \frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\hat{k}_2 = \hat{\omega} - \frac{\hat{\omega}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{4} - \frac{1/4}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\hat{c}_1 = \hat{\omega} - \hat{k}_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\hat{c}_1' = \hat{\sigma}\,\hat{k}_1 = 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{c}_2 = 2\hat{\omega} - \hat{k}_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\hat{c}_2' = 2\hat{\omega} + \hat{\sigma}\,\hat{k}_2 = \frac{1}{2} + 4\frac{3}{16} = \frac{5}{4}.$$

En el estado estacionario donde $\hat{k} = \frac{5}{16}$ se produce la cantidad de bien

$$\hat{Y} = 2\,\hat{K}^{1/2}\,\hat{L}^{1/2} = 2\left(\frac{5n}{16}\right)^{1/2}(5n)^{1/2} = \frac{5n}{2}.$$

De esta cantidad los jóvenes de G1 demandan

$$n\hat{c}_1 = n/8,$$

los jóvenes de G2

$$n\hat{c}_2 = 5n/16,$$

los mayores de G1

$$n\hat{c}_1' = n/2$$

y los mayores de G2

$$n\hat{c}_2' = 5n/4,$$

que suman

$$\frac{n}{8} + 5\frac{n}{16} + \frac{n}{2} + 5\frac{n}{4} = n\frac{2+5+8+20}{16} = \frac{35n}{16}.$$

¿Qué ocurre con la diferencia $5n/16$?