Producción sin remuneraciones competitivas

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que puede producirse y acumularse.

• Cada período nacen n personas, que viven dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$ es una constante, c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Hay dos factores de producción: 'trabajo' (los servicios de producción que proporcionan las personas) y 'capital' (bien acumulado que representa medios de producción físicos).

• El trabajo no es acumulable: sólo se puede utilizar en el período en que se dispone.

• No existe mercado de préstamos del bien.

• Todo joven tiene una unidad de trabajo como dotación. Los mayores no tienen dotación de trabajo.

• Hay una función de producción agregada que indica la cantidad total Y del bien que se produce durante un período t a partir de la cantidad total de trabajo L disponible en t y la cantidad total de capital K disponible en t. Esto significa que nunca hay desempleo. La función de producción en cada período es, con $0 < \alpha < 1$,

$$Y = K^{\alpha}\, L^{1-\alpha}\,.$$

2. Análisis competitivo

Si se asume que existen mercados de trabajo y de capital, y que ambos son competitivos, el salario ω coincide con la productividad marginal del trabajo según la función de producción y la remuneración σ del capital es igual a la productividad marginal del capital, también según la función de producción.

• **Decisiones de acumulación de capital de los jóvenes.** Todo joven asume el problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = c\,(c')^{\beta} \text{ con respecto a } c,\, c' \text{ y } k' \\ \text{sujeto a} & c + k' = 1\,\omega \\ & c' = \sigma' k' \end{array}$$

donde

- c es el consumo de joven,
- c' es el consumo de mayor,
- k' es el volumen de bien acumulado de joven en forma de capital y que se utilizará de mayor,
- ω es el salario (el precio del factor trabajo) de joven y
- σ' es el precio del factor capital de mayor.

El problema se puede resolver directamente introduciendo las restricciones presupuestarias en la función utilidad. Así, todo joven quiere

$$\text{maximizar } u = (\omega - k') \cdot (\sigma' k')^{\beta} \quad \text{respecto de } k'.$$

Por la hipótesis de que los mercados son competitivos, ω y σ' se consideran datos sobre los que no se tiene influencia. Por consiguiente, el problema anterior es equivalente a

$$\text{maximizar } u = (\omega - k')k' \quad \text{respecto de } k'.$$

La solución:

$$\boxed{k' = \omega \frac{\beta}{1+\beta}.}$$

Así que todo joven ahorra en forma de capital una proporción fija $\frac{\beta}{1+\beta}$ del salario que recibe.

• **Precio del factor trabajo.** La productividad marginal del trabajo es la derivada de la función de producción de la economía respecto al trabajo:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(K^{\alpha}L^{1-\alpha})}{dL} = K^{\alpha}\frac{d(L^{1-\alpha})}{dL} = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.$$

Este resultado es válido cada período.

• **Precio del factor capital.** La productividad marginal del capital es la derivada de la función de producción de la economía respecto al capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(K^{\alpha}L^{1-\alpha})}{dK} = L^{\alpha}\frac{d(K^{\alpha})}{dK} = \alpha L^{1-\alpha}K^{\alpha-1} = \alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}.$$

Este resultado es válido cada período.

• **Cantidad total de factores cada período.** Cada período hay n personas jóvenes y n mayores. Esto hace que la cantidad total de factor trabajo cada período sea

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n\,.$$

De aquí se deduce que $L' = L$.

En relación con el capital, los mayores son los únicos que lo aportan cada período. En consecuencia, la cantidad total K de factor capital existente en un período posterior al inicial es nk.

• **Cálculos de precios de los factores de producción.** Recuperando la fórmula de retribución del salario,

$$\omega = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{nk}{n}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)k^{\alpha}.$$

Así,

$$\boxed{k' = \omega\frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta}k^{\alpha}}$$

establece la trayectoria de acumulación del capital (per cápita). En el estado estacionario con capital positivo, el capital es

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

3. Análisis no competitivo

Las hipótesis que reemplazan la condición de que los mercados de trabajo y de capital sean competitivos son:

- la producción se reparte entre trabajo y capital, esto es, $Y = \sigma \cdot K + \omega \cdot L$, donde σ es la remuneración del capital y ω la del trabajo; y
- una regla de distribución establece que la remuneración total del capital es un múltiplo (fijo) de la remuneración total del trabajo, es decir, hay una constante $\pi > 0$ tal que $\sigma K = \pi(\omega L)$.

La regla de distribución también puede expresarse como

$$\pi = \frac{\sigma K}{\omega L}$$

indicando que las proporciones que del producto total se llevan trabajo y capital son fijas. Alternativamente, podría postularse que la relación entre las remuneraciones unitarias (no las totales) es siempre la misma: $\pi = \sigma/\omega$.

Para cada persona, sigue siendo cierto que desea acumular

$$k' = \omega\frac{\beta}{1+\beta}.$$

La diferencia es cómo se determina el salario ω. Ahora, sabiendo que

$$Y = \sigma K + \omega L$$

y que

$$\sigma K = \pi(\omega L)$$

se concluye que

$$Y = (1+\pi)\,\omega L\,.$$

Despejando ω e insertando la función de producción, se obtiene

$$\omega = \frac{Y}{(1+\pi)L} = \frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{(1+\pi)L} = \frac{1}{1+\pi}\frac{K^\alpha}{L^\alpha} = \frac{1}{1+\pi}\frac{(nk)^\alpha}{n^\alpha} = \frac{1}{1+\pi}k^\alpha$$

y, en conclusión,

$$\boxed{k' = \omega\frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\beta}{(1+\pi)(1+\beta)}k^\alpha\,.}$$

Esta trayectoria queda por encima de la trayectoria competitiva si

$$\frac{\beta}{(1+\pi)(1+\beta)} > \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta};$$

esto es, si

$$\pi < \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Hay que recordar que, cuanto mayor π, mayor parte de la tarta del producto recibe el capital. Se infiere de lo anterior que las trayectorias competitivas y no competitivas coinciden si la parte del producto que recibe el capital está determinado por el cociente $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ de elasticidades de los factores (por ejemplo, $\alpha = 0{,}4$ significa que incrementar el capital un 1% hace aumentar la producción un 0,4%).

En el estado estacionario con capital positivo, el capital toma el valor

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta}{(1+\pi)(1+\beta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

• **Ejercicio 1.** Demuestra que α es la elasticidad del producto respecto del capital: $\alpha = \frac{dY}{dK}\frac{K}{Y}$.

• **Ejercicio 2.** Demuestra si es cierto que $1-\alpha = \frac{dY}{dL}\frac{L}{Y}$.