Producción con rendimientos crecientes de escala

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que puede producirse y acumularse.

• Cada período nacen n personas, que viven dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c\,(c')^{\beta}$, donde $\beta > 0$ es una constante, c el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Hay dos factores de producción: 'trabajo' (los servicios de producción que proporcionan las personas) y 'capital' (bien acumulado que representa medios de producción físicos).

• El trabajo no es acumulable: sólo se puede utilizar en el período en que se dispone.

• No existe mercado de préstamos del bien.

• Todo joven tiene una unidad de trabajo como dotación. Los mayores no tienen dotación de trabajo.

• Hay una función de producción agregada que indica la cantidad total Y del bien que se produce durante un período t a partir de la cantidad total de trabajo L disponible en t y la cantidad total de capital K disponible en t. Esto significa que nunca hay desempleo. La función de producción en cada período es

$$Y = A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma}$$

dónde $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$ son constantes que satisfacen $\alpha + \gamma > 1$ y $A > 0$ es una constante (que se suele interpretar como 'productividad total de los factores' o como 'nivel tecnológico'). La desigualdad $\alpha + \gamma > 1$ significa que la función de producción presenta rendimientos crecientes de escala: si los dos factores de producción aumentan en una proporción determinada, entonces la producción aumenta en una proporción superior.

• <u>La remuneración de cada factor de producción es su productividad marginal ajustada por un parámetro</u> (con rendimientos crecientes no hay producción suficiente para remunerar según la productividad marginal). Específicamente, para una constante positiva dada $\tilde{\omega}$, el salario es

$$\omega = \tilde{\omega} \cdot PMg_L$$

y, para una constante positiva dada $\tilde{\sigma}$, el precio del capital es

$$\sigma = \tilde{\sigma} \cdot PMg_K.$$

• El cociente de los parámetros de distribución $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\sigma}$ es una constante; esto es, un parámetro es un múltiplo de la otra: para una cierta constante $\delta > 0$, $\tilde{\sigma} = \delta\,\tilde{\omega}$.

• <u>Toda la producción se reparte entre ambos factores de producción</u>: las reglas de distribución de la producción hacen que no haya ni déficit ni superávit de producción. Formalmente,

$$Y = \omega L + \sigma K.$$

2. Análisis

• **Decisiones de acumulación de capital de los jóvenes.** Todo joven pretende

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & u = c(c')^\beta \;\text{ con respecto a } c,\, c' \text{ y } k' \\ \text{sujeto a} & c + k' = 1 \cdot \omega \\ & c' = \sigma' k' \end{array}$$

donde c es el consumo de joven, c' el consumo de mayor, k' el bien acumulado de joven en forma de capital para emplearse de mayor, ω el salario (el precio del factor trabajo) de joven y σ' es el precio del factor capital de mayor. Introduciendo las restricciones presupuestarias en la función utilidad, todo joven quiere

$$\text{maximizar } \; u = (\omega - k')(\sigma' k')^\beta \; \text{ respecto de } k'.$$

Según la condición de primer orden,

$$0 = \frac{du}{dk'} = -(\sigma' k')^\beta + (\omega - k')(\sigma')^\beta\, \beta\, (k')^{\beta - 1}$$

o

$$(k')^\beta = (\omega - k')\, \beta\, \frac{(k')^\beta}{k'}$$

o

$$k' = (\omega - k')\beta$$

o

$$\boxed{k' = \frac{\omega\beta}{1+\beta}\,.} \tag{1}$$

• **Precio del factor trabajo.** La productividad marginal del trabajo se define como la derivada de la función de producción agregada respecto al trabajo:

$$PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(A\,K^\alpha\,L^\gamma)}{dL} = A\,K^\alpha\,\frac{d(L^\gamma)}{dL} = \gamma A\,K^\alpha\,L^{\gamma-1}.$$

La remuneración ω del trabajo es

$$\omega = \widetilde{\omega} \cdot PMg_L = \widetilde{\omega}\gamma A\,K^\alpha\,L^{\gamma-1}.$$

• **Cantidad total de factores cada período.** Cada período hay n personas jóvenes y n personas mayores. Esto hace que la cantidad total de factor trabajo cada período sea

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n.$$

De aquí se deduce que $L' = L$: cada período existe la misma cantidad de factor trabajo.

Dado que los mayores son los únicos que aportan capital cada período, la cantidad total K de factor capital existente en un período diferente al inicial es nk.

• **Cálculos del precio del factor trabajo.** Según la fórmula $\omega = \widetilde{\omega}\,\gamma\,A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma-1}$del salario,

$$\omega = \widetilde{\omega}\,\gamma\,A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma-1} = \widetilde{\omega}\,\gamma\,A\,(nk)^{\alpha}\,(n)^{\gamma-1} = \widetilde{\omega}\,\gamma\,A\,n^{\alpha+\gamma-1}\,k^{\alpha}$$

donde $\alpha + \gamma - 1 > 0$.

• **Determinación del capital que acumula cada joven.** Aplicando la fórmula anterior y (1),

$$k' = \frac{\beta}{1+\beta}\,\omega = \frac{\beta\,\widetilde{\omega}\,\gamma\,A\,n^{\alpha+\gamma-1}}{1+\beta}k^{\alpha}.$$

• **¿Es todo consistente?** En ninguno de los cálculos anteriores ha intervenido el precio del capital σ (eso se debe a que los mayores no tienen ninguna fuente exógena de bien, por lo que los jóvenes acumularán capital con independencia del precio futuro del capital). Además, todo el análisis ha sido microeconómico (desde el punto de vista de los jóvenes). La pregunta es si hay algo que garantice que todo ello es macroeconómicamente factible.

La respuesta pasa por asegurarse del cumplimiento de la condición $Y = \omega L + \sigma K$. En concreto, es necesario que

$$A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma} = \widetilde{\omega}\,PMg_L\,L + \delta\,\widetilde{\omega}\,PMg_K\,K$$

o

$$A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma} = \widetilde{\omega}(\gamma\,A\,K^{\alpha}\,L^{\gamma-1})L + \delta\widetilde{\omega}(\alpha\,A\,K^{\alpha-1}\,L^{\gamma})K$$

o

$$K^{\alpha}\,L^{\gamma} = \widetilde{\omega}(\gamma\,K^{\alpha}\,L^{\gamma}) + \delta\widetilde{\omega}(\alpha K^{\alpha}\,L^{\gamma})$$

o

$$1 = \widetilde{\omega}\gamma + \delta\widetilde{\omega}\alpha$$

o

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{\gamma + \delta\alpha}.$$

En resumen,

$$\boxed{k' = \frac{\beta\,\gamma\,A\,n^{\alpha+\gamma-1}}{(1+\beta)(\gamma+\delta\alpha)}k^{\alpha}.}$$

Cuanto mayor es δ (cuanto más se incline la distribución a favor del capital) menor es la acumulación de capital. La razón es simple: cuanto mayor δ, menor es el parámetro $\widetilde{\omega}$ de ajuste al alza de la productividad del trabajo (como se ha calculado, $\widetilde{\omega} = (\gamma + \delta\alpha)^{-1}$); cuanto menor $\widetilde{\omega}$, más bajo el salario ω; y cuanto menor el salario, menos acumulación (ya que $k' = \omega\beta/(1+\beta)$).

• **Ejercicio.** ¿Y si cada mayor tuviera $x > 0$ unidades de factor trabajo?