Préstamos privados, acumulación de capital y producción

1. Descripción de la economía

• Hay un único bien que puede producirse y acumularse.

• Cada período nacen dos grupos de personas, G1 y G2, cada uno con n miembros.

• Toda persona vive dos períodos consecutivos.

• Todo joven tiene la función de utilidad $u = c \cdot c'$, donde c es el consumo del bien de joven y c' el consumo de mayor. Todo mayor tiene la función de utilidad $u' = c'$.

• Hay dos factores de producción: 'trabajo' (los servicios de producción que proporcionan las personas) y 'capital' (bien acumulado que representa medios de producción físicos). El trabajo no es acumulable: sólo se puede utilizar en el período en que se dispone. Trabajo y capital se intercambian en mercados competitivos. Hay mercado de préstamos del bien.

• Las personas tienen dotación de factor de trabajo. La dotación de cada miembro de G1 es (1, 0): una unidad laboral de joven y ninguna de mayor. La dotación de cada miembro de G2 es (2, 2): dos unidades de trabajo de joven y dos de mayor.

• Hay una función de producción agregada que determina la cantidad total Y de bien que se produce durante un período a partir de la cantidad total de trabajo L disponible en el período y la cantidad total de capital K disponible en el período. La expresión que define la función de producción en cada período es

$$Y = 2\, K^{1/2}\, L^{1/2}\,.$$

2. Análisis

• **Decisiones de los jóvenes.** Todo joven quiere

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad u = c\, c' \quad \text{con respecto a } c, c', l \text{ y } k' \\ &\text{sujeto a} \quad c + l + k' = L\,\omega \\ &\qquad\qquad\quad c' = L'\,\omega' + R\,l + \sigma' k' \end{aligned}$$

donde

- c es el consumo de joven,
- c' es el consumo de mayor,
- L es la dotación de trabajo de joven,
- L' es la dotación de trabajo de mayor,
- l son los préstamos privados (ofrecidos o demandados),
- k' es la cantidad de bien acumulada para el período siguiente (acumulación de capital),
- ω es el salario de joven,
- ω' es el salario de mayor,
- σ' es la remumeración del capital de mayor,
- R es el tipo de interés bruto.

Dividiendo por R la segunda restricción y sumando las dos, los préstamos privados se cancelan y el problema se reduce a

maximizar $u = c\, c'$ con respecto a c, c' y k'

sujeto a $c + \frac{c'}{R} = L\,\omega + \frac{L'\omega'}{R} + k'\left(\frac{\sigma'}{R} - 1\right)$

donde la restricción representa ahora una restricción presupuestaria vital.

Si $\sigma' > R$, entonces no existe mercado de préstamos y si $\sigma' < R$ no hay acumulación de capital para el futuro. Conclusión: para que coexistan mercado de préstamos y de capital es necesario que $\sigma' = R$. En este caso, la restricción vital se reduce a

$$c + \frac{c'}{R} = w + \frac{w'}{R}$$

dónde $w = L\,\omega$ y $w' = L'\omega'$. Este problema es ya familiar y tiene como solución (en cuanto al ahorro de joven $s = w - c$)

$$s = \frac{w}{2} - \frac{w'}{2R}.$$

En concreto, para G1,

$$s_1 = \frac{\omega}{2}$$

y, para G2,

$$s_2 = \omega - \frac{\omega'}{R}.$$

Así pues, se sigue de la restricción presupuestaria de los jóvenes que

$$\frac{\omega}{2} = s_1 = l_1 + k_1'$$

$$\omega - \frac{\omega'}{R} = s_2 = l_2 + k_2'\,.$$

Sumando las ecuaciones,

$$\frac{3\omega}{2} - \frac{\omega'}{R} = s_2 = l_1 + l_2 + k_1' + k_2'\,.$$

Por la condición de equilibrio en el mercado de préstamos ($nl_1 + nl_2 = 0$) y definiendo $k' = k_1' + k_2'$,

$$\frac{3\omega}{2} - \frac{\omega'}{R} = k'\,.$$

Por la condición de igualdad $R = \sigma'$ entre tipo de interés y remuneración del capital,

$$\frac{3\omega}{2} - \frac{\omega'}{\sigma'} = k'\,.$$

Por la hipótesis de que los mercado de trabajo y capital son competitivos,

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial \omega} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{nk}{5n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega' = \frac{\partial Y'}{\partial \omega'} = \left(\frac{K'}{L'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{nk'}{5n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k'}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma' = \frac{\partial Y'}{\partial \sigma'} = \left(\frac{L'}{K'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5n}{nk'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5}{k'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En resumen,

$$\frac{3}{2}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k'}{5} = k'$$

o

$$\frac{3}{2}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}k'$$

o

$$\boxed{k' = \frac{5^{1/2}}{4}k^{1/2}\,.}$$

Esta expresión determina el valor de la acumulación de capital per cápita (de jóvenes) $k' = k_1' + k_2'$. Aparte del estado estacionario trivial con $k = 0$ hay otro estado estacionario con acumulación de capital, con $k^* = 5/16$.

[La ecuación de acumulación de capital puede utilizarse para establecer la dinámica de los precios de los factores. Específicamente, dado que

$$\omega = \left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

es válida para todo período,

$$\omega' = \left(\frac{k'}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{5^{1/2}}{4}k^{1/2}}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5^{1/2}}{4}\frac{k^{1/2}}{5^{1/2}5^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega^{1/2}}{2}$$

es la ecuación que traza la evolución del salario. Según esta relación, el salario de estado estacionario sería $\omega^* = ¼$. Se trata del mismo valor obtenido sustituyendo al valor estacionario $k^* = 5/16$ del capital en la función $\omega = \left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ que relaciona salario y capital.

• **Ejercicio.** Determina la ecuación dinámica que establece la evolución de la remuneración σ del capital.]

Sin embargo, la distribución del ahorro entre préstamos y acumulación de capital queda indeterminada: hay muchas maneras de distribuir el ahorro entre préstamos y capital compatibles con la solución de estado estacionario. De hecho, considerando los valores de estado estacionario, tiene que cumplirse

$$l_1 + k_1 = \frac{\omega}{2} = \frac{1}{8}$$

$$l_2 + k_2 = \omega\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

$$k_1 + k_2 = k^* = \frac{5}{16}$$

$$l_1 + l_2 = 0.$$

Combinando la primera y la tercera ecuaciones,

$$l_1 + \left(\frac{5}{16} - k_2\right) = \frac{1}{8}.$$

Utilizando la cuarta,

$$-l_2 + \left(\frac{5}{16} - k_2\right) = \frac{1}{8}.$$

Así pues,

$$\frac{5}{16} - \frac{1}{8} = l_2 + k_2$$

que es la segunda ecuación.

En consecuencia, el sistema de cuatro ecuaciones no es linealmente independiente. Esto implica que hay un continuo de vectores (l_1, l_2, k_1, k_2) que satisfacen las cuatro ecuaciones.

Por ejemplo, eligiendo un valor de l_1 (haciendo $l_1 = x$), por la cuarta ecuación se obtendría $l_2 = -x$; por la primera, $k_1 = \frac{1}{8} - x$; y, por la tercera, $k_2 = \frac{5}{16} - k_1 = x + \frac{3}{16}$.

De esta manera, si los jóvenes de G1 quieren prestar más, los jóvenes de G2 compensan el capital que los jóvenes de G1 no acumulan cuando prestan más.