Un modelo con crecimiento y simbiosis público-privada

1. El modelo

El modelo de crecimiento básico (de Robert Solow y Trevor Swan[1]) se reduce a una ecuación que define la dinámica de acumulación de capital:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sY_t$$

donde K_{t+1} es el stock de capital del período siguiente, K_t el stock capital del período presente, δ la tasa de depreciación del stock de capital, s la tasa de ahorro e Y_t el producto agregado, según una función de producción del tipo

$$Y_t = A\, {K_t}^{\alpha} {L_t}^{1-\alpha}$$

con A representando el nivel de tecnología (que tiene un efecto multiplicador sobre todos los factores de producción), L_t el factor trabajo y α siendo una constante entre cero y uno.

Esta ecuación puede interpretarse como una representación básica del sector privado. El modelo que se propone añade el sector público. En concreto, el sector privado se encargará de acumular capital y el sector privado de acumular/desarrollar tecnología.

El modelo está formado por los siguientes elementos.

- Stock de capital K_t
- Trabajo L_t
- Tecnología A_t
- Función de producción $Y_t = A_t\, {K_t}^{\alpha} {L_t}^{1-\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$
- Tasa de ahorro del sector privado s
- Tasa impositiva del sector público τ
- Tasa de depreciación del capital δ_K
- Tasa de depreciación tecnológica δ_A
- Impacto del gasto público en la tecnología γ

El sector público recaúda τY_t y emplea esta recaudación en la acumulación de tecnología. El parámetro γ transforma el gasto público τY_t en tecnología A_{t+1} para el período siguiente.

El sector privada destina la parte $s(1 - \tau)Y_t$ a acumular capital K_{t+1} para el período siguiente.

En el paso de un período al siguiente, la proporción δ_K del capital se pierde y la fracción δ_A de la tecnología desaparece.

[1] Solow, Robert M. (1956): “A contribution to the theory of economic growth”, *Quarterly Journal of Economics* 70, 65-94.
Swan, Trevor W. (1956): “Economic growth and capital accumulation”, *Economic Record* 32, 334-361.

Las ecuaciones de acumulación de los dos sectores son:

$$K_{t+1} = (1-\delta_K)K_t + s(1-\tau)Y_t$$

$$A_{t+1} = (1-\delta_A)A_t + \gamma\tau Y_t$$

o bien

$$\Delta K_t = K_{t+1} - K_t = s(1-\tau)Y_t - \delta_K K_t$$

$$\Delta A_t = A_{t+1} - A_t = \gamma\tau Y_t - \delta_A A_t.$$

El resultado que interesa obtener en el modelo es que capital y tecnología puedan acumularse sin límite (que no haya un estado estacionario). Esta doble acumulación aparentemente indefinida caracteriza el crecimiento económico moderno.

Como primera aproximación, la cantidad de trabajo se asume constante: $L_t = L$.

Por un lado, para tener $\Delta A_t > 0$ se requiere

$$\gamma\tau Y_t > \delta_A A_t$$

$$\gamma\tau A_t\, {K_t}^{\alpha} L^{1-\alpha} > \delta_A A_t$$

$${K_t}^{\alpha} > \frac{\delta_A}{\gamma\tau L^{1-\alpha}}$$

$$K_t > \left(\frac{\delta_A}{\gamma\tau L^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}.$$

De manera similar, $\Delta A_t = 0$ equivale a

$$K_t = \left(\frac{\delta_A}{\gamma\tau L^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}.$$

La Fig. 1 representa la condición $\Delta A_t = 0$ en el espacio (K_t, A_t). Dado que $K_t = \left(\frac{\delta_A}{\gamma\tau L^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$ no depende de A_t y es un valor constante, su representación gráfica viene dada por una recta vertical.

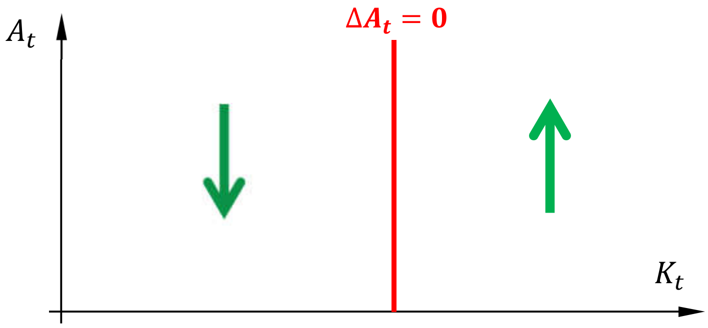

Fig. 1. Condición de estacionariedad del nivel tecnológico

En la medida que $\Delta A_t > 0$ se asocia con $K_t > \left(\frac{\delta_A}{\gamma \tau L^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$, el valor de A_t crece a la derecha de la recta de la Fig. 1 y decrece a la izquierda (como indican las flechas).

Por otro lado, para tener $\Delta K_t > 0$ se requiere

$$s(1-\tau)Y_t > \delta_K K_t$$

$$s(1-\tau)A_t\, K_t{}^{\alpha} L^{1-\alpha} > \delta_K K_t$$

$$A_t > \frac{\delta_K}{s(1-\tau)L^{1-\alpha}} K_t{}^{1-\alpha}.$$

Así que $\Delta K_t = 0$ equivale a

$$A_t = \frac{\delta_K}{s(1-\tau)L^{1-\alpha}} K_t{}^{1-\alpha}.$$

La Fig. 2 representa la condición $\Delta K_t = 0$ en el espacio (K_t, A_t). Por la hipótesis $0 < \alpha < 1$, $K_t{}^{1-\alpha}$ es una funcion creciente y cóncava. Por consiguiente, $A_t = \frac{\delta_K}{s(1-\tau)L^{1-\alpha}} K_t{}^{1-\alpha}$ es una función creciente y cóncava.

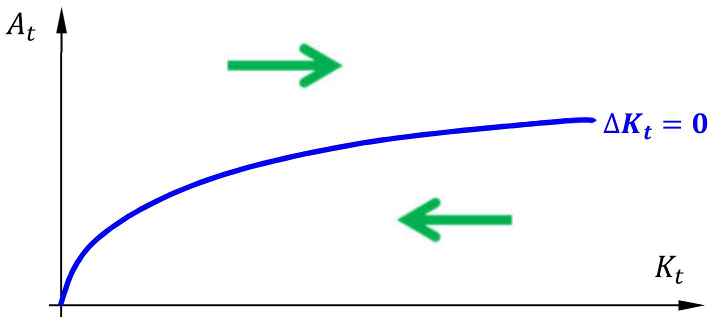

Fig. 2. Condición de estacionariedad del stock de capital

Por cuanto $\Delta K_t > 0$ corresponde a $A_t > \frac{\delta_K}{s(1-\tau)L^{1-\alpha}} K_t{}^{1-\alpha}$, el valor de K_t crece por encima de la curva de la Fig. 2 y decrece por debajo (como indican las flechas). La Fig. 3 reúne las Figs. 1 y 2.

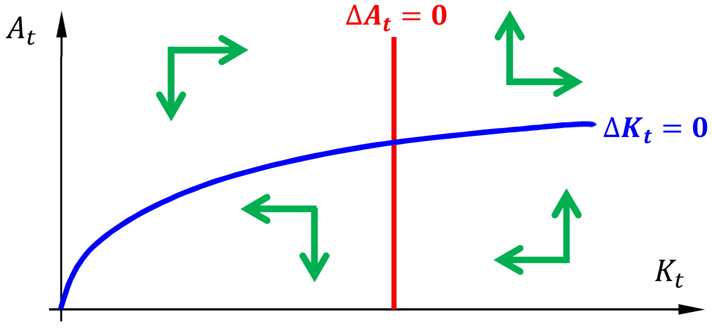

Fig. 3. Posibles dinámicas en el modelo

La Fig. 4 reproduce la Fig. 3. La Fig. 4 evidencia que, de las cuatro regiones **R1**, **R2**, **R3** y **R4** que definen la recta y la curva, sólo una (la región superior derecha **R4**) conduce a la doble acumulación de capital y tecnología.

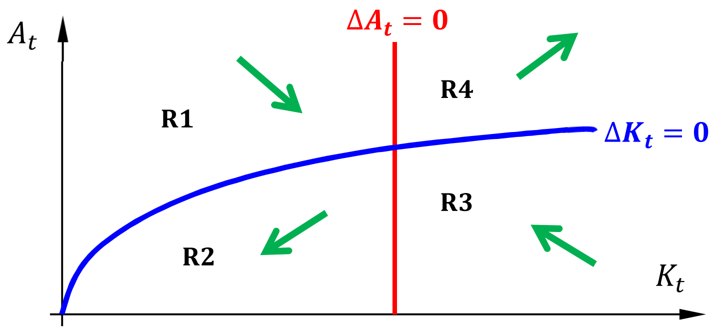

Fig. 4. Regiones con sus dinámicas

La dinámica expansiva se retroalimenta: si en un período capital y tecnología se sitúan en **R4**, entonces en el período siguiente los valores se continúan situando en **R4**. El mismo argumento funciona en **R4**: ahora la dinámica es contractiva.

La dinámica en **R1** y **R3** es diferente: desde **R1** es concebible pasar a **R2** (y se llega al colapso), a **R4** (y se consigue crecimiento) o (excepcionalmente) a **R3**; y desde **R3** es concebible pasar a **R2** (y colapsar), a **R4** (y crecer) o (excepcionalmente) a **R1**.

En resumen, en el modelo o se crece o se colapsa.

2. Estática comparativa

Se deja como ejercicio el análisis gráfico de la estática comparativa: qué ocurre si alguno de los parámetros del modelo (la productividad relativa α, la efectividad γ de la inversión pública, el tipo impositivo τ, la tasa de ahorro s y las tasas de depreciación δ_K y δ_A) se modifica.

Por ejemplo, si la efectividad γ de la inversión pública aumenta, el valor $\left(\frac{\delta_A}{\gamma\tau L^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$ sobre el que se traza la recta vertical en la Fig. 4 disminuye y, por consiguiente esta recta se desplaza hacia la izquierda. De manera poco sorprendente, la región **R4** de acumulación sostenida se agranda y, por ello, es más fácil conseguir el resultado de crecimiento.

Otra ilustración: si se incrementa la tasa de ahorro s, la constante $\frac{\delta_K}{s(1-\tau)L^{1-\alpha}}$ mengua y, como consecuencia, la curva en la Fig. 4 rota hacia abajo. Esta rotación expande la región **R4** de crecimiento. Esta conclusión tampoco causa sorpresa: tasa de ahorro superior, más acumulación de capital, más recaudación del gobierno y más inversión en tecnología.

Cabe la posibilidad de respuesta ambigua con respecto al volumen de la región **R4**. Específicamente, como muestra la Fig. 5, lo que desplaze la recta hacia la derecha y, a la vez, la curva hacia abajo causa una pérdida en la región **R4** (el área **P** sombreado en violeta) pero también una ganancia (el área **G** sombreado en azul cielo). Para establecer qué efecto domina hará falta conocer la magnitud de los cambios en los parámetros que provocan las modificaciones en la recta y la curva.

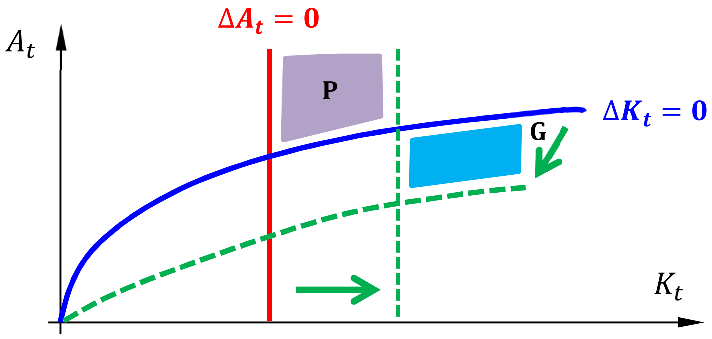

Fig. 5. Efectos ambiguos de los cambios en los parámetros