Un modelo de Robert Barro

El modelo analizado a continuación toma de Robert Barro[1], que extiende el modelo de crecimiento de Solow (1956)[2] y Swan (1956)[3] con la incorporación de un gobierno (o sector público).

El gobierno aporta un bien público, que puede interpretarse como una externalidad positiva en la producción. Por ejemplo, puede interpretarse que el gobierno facilita infraestructuras (de transporte, de energía, de comunicaciones, digitales…). La cantidad de bien gasto en el bien público se designa por E. Se podría considerar que Erepresenta el volumen de recursos que el gobierno destina a desarrollar una política industrial dirigida a incrementar la productividad (o hacer permanente el crecimiento económico).

- **Función de producción agregada** $\quad Y = A\,K^{\alpha}\,E^{1-\alpha}$ $\quad$ con $0 < \alpha < 1$ y $A > 0$

La población crece a una tasa constante $n > 0$. Dividiendo los dos lados de la ecuación por la población L se obtiene la función de producción per cápita (donde $k = \frac{K}{L}$ y $e = \frac{E}{L}$) .

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{A\,K^{\alpha}\,E^{1-\alpha}}{L} = A\,\frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}}\,\frac{E^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{G}{L}\right)^{1-\alpha} = A\,k^{\alpha}\,e^{1-\alpha}$$

- **Función de producción per cápita** $\quad y = A\,k^{\alpha}\,e^{1-\alpha}$

El bien público (la política industrial) se financia con impuestos. La tasa impositiva es $0 < \tau < 1$. La renta agregada disponible Y_d es $Y_d = (1-\tau)\,Y$. Se asume que el sector privado ahorro una proporción fija $0 < \mathbb{s} < 1$de la renta disponible.

- **Función de ahorro agregado** $\quad S = \mathbb{s}\,Y_d = \mathbb{s}\,(1-\tau)\,Y$ $\quad$ con $\mathbb{s}$ siendo la tasa de ahorro

- **Equilibrio macroeconómico** $\quad S = I$ $\quad$ con I siendo la inversión privada agregada

El capital se acumula como en el modelo de Solow y Swan, donde $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación del capital:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)\,K_t.$$

Dividendo ambos lados por L_{t+1} y sabiendo que $L_{t+1} = (1+n)\,L_t$,

---

[1] Barro, Robert J. (1990): "Government spending in a simple model of endogenous growth", Journal of Political Economy 98, 103-125.

[2] Solow, Robert M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth", Quarterly Journal of Economics 70, 65-94.

[3] Swan, Trevor W. (1956): "Economic growth and capital accumulation", Economic Record 32, 334-361.

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{I_t}{(1+n)\,L_t} + \frac{(1-\delta)\,K_t}{(1+n)\,L_t}.$$

Empleando la condición de equilibrio macroeconómico,

$$k_{t+1} = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)\,Y_t}{(1+n)\,L_t} + \frac{(1-\delta)\,K_t}{(1+n)\,L_t} = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n} y_t + \frac{1-\delta}{1+n}\,k_t\,.$$

Si se resta k_t de ambos lados de la igualdad,

$$k_{t+1} - k_t = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n} y_t + \left(\frac{1-\delta}{1+n} - 1\right) k_t = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n} y_t - \left(\frac{\delta+n}{1+n}\right) k_t$$

o, en notación más compacta:

$$\Delta k = \frac{\mathbb{s}(1-\tau)}{1+n} y - \left(\frac{\delta+n}{1+n}\right) k\,.$$

- **Dinámica del capital per cápita**

$$g_k = \frac{\Delta k}{k} = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n}\frac{y}{k} - \frac{\delta+n}{1+n}$$

Insertando $y = A\,k^{\alpha}\,e^{1-\alpha}$ en la ecuación anterior resulta que

$$g_k = \frac{\mathbb{s}(1-\tau)}{1+n} A \left(\frac{e}{k}\right)^{1-\alpha} - \frac{\delta+n}{1+n}\,. \tag{1}$$

El presupuesto público se asume siempre equilibrado: impuestos y gasto en el bien público coinciden.

- **Condición de equilibrio presupuestario** $\quad E = \tau\,Y = \tau\,A\,K^{\alpha}\,E^{1-\alpha}$

Expresada en términos per cápita, la condición de equilibrio es $e = \tau\,A\,k^{\alpha}\,e^{1-\alpha}$. Es decir,

$$e = k\,(\tau\,A)^{\frac{1}{\alpha}}\,. \tag{2}$$

Si (2) se añade a la ecuación (1) que describe la dinámica del capital per cápita,

$$g_k = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n}\,A\,\left(\frac{e}{k}\right)^{1-\alpha} - \frac{\delta+n}{1+n} = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n}\,A\,(\tau\,A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\delta+n}{1+n} =$$

$$= \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n}\,A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\delta+n}{1+n}.$$

Si (2) se introduce en la ecuación $y = A\,k^{\alpha}\,e^{1-\alpha}$ que describe la producción per cápita,

$$y = A\,k^{\alpha}\,e^{1-\alpha} = A\,k^{\alpha}\left(k\,(\tau\,A)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{1-\alpha} = A\,k\,(\tau\,A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,k\,.$$

Esta expresión es equivalente a la función de producción per cápita del modelo AK de crecimiento, con la diferencia de que la constante A del modelo AK ahora toma la forma

$$A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,.$$

Dado que y es proporcional a k, como en el modelo AK, se sigue que la tasa de crecimiento g_y del producto per cápita y es igual a la tasa de crecimiento g_k del capital per cápita k. Como resultado,

$$g_y = g_k = \frac{\mathbb{s}\,(1-\tau)}{1+n}\,A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\delta+n}{1+n}.$$

Una implicación inmediata de esta ecuación es que $g_y > 0$ si, y sólo si,

$$\mathbb{s}\,(1-\tau)\,A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} > \delta + n\,;$$

esto es, si, y sólo si,

$$\boxed{\mathbb{s} > \frac{\delta+n}{(1-\tau)\,A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.}$$

Este resultado evidencia que <u>una tasa de ahorro $\mathbb{s}$ suficientemente elevada aseguraría el crecimiento sostenido del producto per cápita y</u>, a diferencia de la convergencia a cero de la tasa g_y en el modelo de Solow y Swan.

Una pregunta interesante desde el punto de vista de la política industrial sería determinar el valor de τ que maximiza la tasa de crecimiento g_y de y.

• **Ejercicio.** Calcula la derivada parcial de $(\delta+n)/\left((1-\tau)\,A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)$ respecto de τ e interpreta el resultado en el contexto del problema de garantizar que $g_y > 0$.